HMEF104 — Electromagnétisme

TP1 - Electrostatique

1 Objectifs du TP

- Proposer un protocole permettant une méthode quantitative de la mesure de la capacité d'un condensateur plan « d'Aepinus ».
- Mettre en place ce protocole, en effectuant un traitement rigoureux des incertitudes.
- Mesurer la constante diélectrique relative ε_r d'un matériau.
- Matériel :
  - Condensateur plan
  - RLC-mètre
  - Plaque de Plexiglas

Pour réaliser ce TP, on pourra s'inspirer des exercices ci-dessous.

2 Exercices complémentaires

2.1 Capacité d'un condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures planes circulaires de section S, séparées d'une épaisseur e. On assimilera l'air au vide. On se placera dans le cas $\sqrt{S} \gg e$, de sorte de négliger les effets de bords. On notera (Oz) l'axe des deux armatures, avec O le milieu de l'armature de gauche. L'armature en $z = 0$ est chargée uniformément σ, avec une charge totale $Q > 0$. L'armature en $z = e$ est de charge uniforme opposée.

1. Donner les symétries et les invariances du potentiel électrostatique et du champ électrique entre les armatures.

Solution: La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), donc en coordonnées cylindriques, et entre les armatures, on a : $V(M) = V(r, z)$ et $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r, z)$. De plus, dans l'hypothèse où $\sqrt{S} \gg e$, on peut négliger les effets de bord, et considérer que le champ électrique et le potentiel électrostatique ne dépendent pas de r, de sorte que $V(M) = V(z)$ et $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(z)$.
De plus, le plan passant par M et contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Ainsi, on peut écrire que :

$$\boldsymbol{E}(M) = E_r(z)\boldsymbol{e_r} + E_z(z)\boldsymbol{e_z}.$$

Or, on sait que $\boldsymbol{E}(M) = -\boldsymbol{\nabla} V(M)$. Comme $V(M)$ ne dépend que de z, alors on en déduit que :

$$\boldsymbol{E}(M) = E(z)\boldsymbol{e_z} \tag{1}$$

2. Montrer que le champ électrique est uniforme entre les armatures.

benjamin.guiselin@umontpellier.fr

Solution: On applique le théorème de Gauss sur un cylindre élémentaire de hauteur $\mathrm{d}z$, de même axe que les armatures du condensateur, entre les hauteurs z et $z + \mathrm{d}z$, et de section s. Le flux du champ électrique à travers ce cylindre s'écrit :

$$\mathrm{d}\Phi = E(z + \mathrm{d}z)s - E(z)s = \frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0,$$

car il n'y a pas de charges entre les armatures. Ainsi, on en déduit que $E(z + \mathrm{d}z) = E(z)$, soit en faisant un développement limité au premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{2}$$

Le champ électrique est donc uniforme entre les deux armatures.

3. Relier le champ électrique à la tension $U = V(0) - V(e)$ entre les deux armatures. Commenter le signe.

Solution: On calcule la circulation du champ électrique entre $z = 0$ et $z = e$:

$$\int_0^e \mathrm{d}z \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e_z} = \int_0^e \mathrm{d}z E = Ee.$$

Or, on rappelle que la circulation du champ électrique est l'opposée de la variation du potentiel électrique :

$$\int_0^e \mathrm{d}z \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e_z} = -\int_0^e \mathrm{d}z \boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{e_z} = -\left[V(z)\right]_0^e = -V(e) + V(0) = U,$$

soit :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{U}{e}\boldsymbol{e_z}. \tag{3}$$

L'armature en $z = 0$ est chargée positivement, de sorte que $V(0) > V(e)$. Ainsi la tension $U > 0$ et le champ sont dirigés selon $+\boldsymbol{e_z}$, soit de l'armature positive vers l'armature négative, ce qui est cohérent.

4. Exprimer le champ électrique en fonction de Q, S, ε_0.

Solution: On peut utiliser le théorème de superposition, qui indique que le champ électrique dans le condensateur est la somme des champs créés par chacune des armatures :

$$\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E_1}(M) + \boldsymbol{E_2}(M),$$

où $\boldsymbol{E_{1,2}}(M)$ est le champ créé par l'armature en $z = 0, e$ respectivement. On assimile chacune des armatures à une densité surfacique de charges uniforme $\sigma = Q/\varepsilon_0$. Les symétries et invariances du champ électrique sont inchangées, de sorte que :

$$\boldsymbol{E_{1,2}}(M) = E_{1,2}(z)\boldsymbol{e_z}.$$

L'armature 1 admet le plan d'équation $z = 0$ comme plan de symétrie, ainsi pour le champ électrique :

$$\boldsymbol{E_1}(-z) = -\boldsymbol{E_1}(z).$$

La fonction $E_1(z)$ est donc une fonction impaire de z. On considère donc un cylindre de surface s

entre $-z$ et z. On applique le théorème de Gauss pour l'armature 1 seule avec $z > 0$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ sE_1(z) - sE_1(-z) &= \frac{\sigma s}{\varepsilon_0} \\ 2sE_1(z) &= \frac{\sigma s}{\varepsilon_0} \\ E_1(z) &= \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \end{aligned}.$$

Ainsi, on en déduit que pour l'armature 1, on a :

$$\boldsymbol{E_1}(M) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} \text{ si } z > 0 \\ -\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} \text{ si } z < 0 \end{cases}.$$

On obtient alors facilement le résultat pour l'armature 2 en changeant le signe de Q :

$$\boldsymbol{E_2}(M) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} \text{ si } z > e \\ \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} \text{ si } z < e \end{cases}.$$

Ainsi, entre les armatures du condensateur $0 < z < e$, on a :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\boldsymbol{e_z}. \tag{4}$$

5. Trouver la relation entre U et Q. En déduire l'expression de la capacité C du condensateur en fonction de ε_0, S et e. Retrouver le résultat par analyse dimensionnelle. En déduire un ordre de grandeur pour des disques de rayon $R = 30\,\text{cm}$ et une épaisseur $e = 1\,\text{cm}$.

Solution: En combinant les résultats des questions précédentes, on obtient :

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{U}{e} \Longleftrightarrow Q = CU, \tag{5}$$

où

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \tag{6}$$

désigne la capacité du condensateur plan. Ce résultat aurait pu être obtenu facilement par analyse dimensionnelle car ε_0 s'exprime en $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$. Il faut donc construire une longueur à partir de S et e : S/e est l'unique candidat possible. Pour $S = \pi R^2$ (avec $R = 30\,\text{cm}$), et $e = 1\,\text{cm}$, on obtient l'ordre de grandeur suivant de la capacité :

$$C = \frac{8{,}85 \times 10^{-12} \times \pi \times \left(3 \times 10^{-1}\right)^2}{10^{-2}} =\simeq \pi \times 3^2 \times 10^{-11} \simeq 3 \times 10^{-10}\,\text{F} = 0{,}3\,\text{nF}. \tag{7}$$

6. On place un matériau diélectrique de constante diélectrique relative ε_r entre les deux armatures, de même section S que les armatures, et d'épaisseur $e' < e$. Calculer la nouvelle capacité C du condensateur. Commenter. Faire l'application numérique pour $e = e'$ et $\varepsilon_\text{r} = 3{,}5$ (plexiglas). On utilisera la relation de

passage du champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2 **isolants** :

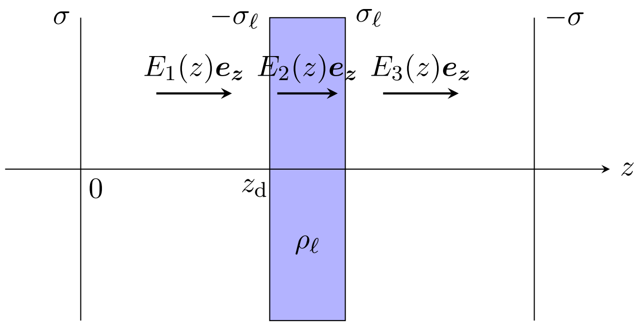
$$\varepsilon_{\mathrm{r},2}\boldsymbol{E_2} - \varepsilon_{\mathrm{r},1}\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{0}.$$

On utilisera aussi le fait qu'en présence d'un champ électrique un matériau acquiert une polarisation $\boldsymbol{P}$ qui correspond à une densité volumiques de dipôles électrostatiques. On admettra alors que le champ créé par cette distribution de dipôles s'assimile à la superposition des champs électriques créés par une densité volumique de charges liées ρ_ℓ dans le volume du diélectrique et une densité surfacique de charges liées σ_ℓ à ses surfaces extérieures, avec :

$$\begin{cases} \rho_\ell = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \\ \sigma_\ell = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}, \end{cases},$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface, et $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_\mathrm{r} - 1\right) \boldsymbol{E}$.

Solution: On schématise la situation :



Les considérations précédentes de symétrie et d'invariance sont toujours vérifiées, de sorte que le champ électrique est toujours selon $\boldsymbol{e_z}$ et ne dépend que de z.

Dans l'air, il n'y a pas de charge volumique. Un raisonnement analogue à celui des questions précédentes montre que E_1 et E_3 sont indépendants de z. Dans le diélectrique, la relation entre $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E_2}$ indique que :

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \boldsymbol{E_2},$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \rho_\ell = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) \dfrac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z} \\ \sigma_\ell = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) E_2 \end{cases}.$$

On applique alors le théorème de Gauss sur un cylindre élémentaire de même axe que les armatures du condensateur, de section s entre z et $z + \mathrm{d}z$ dans le diélectrique. Le flux latéral est nul et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= \frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{int}}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}} \\ E_2(z + \mathrm{d}z)s - E_2(z)s &= \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\varepsilon_r}\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z}s\mathrm{d}z, \\ \frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z} &= \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\varepsilon_r}\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Ainsi E_2 est aussi indépendant de z, et on a également que la charge volumique liée ρ_ℓ est nulle. Le champ électrique dans le diélectrique étant uniforme, on en déduit la charge surfacique liée :

$$\sigma_\ell = \varepsilon_0(\varepsilon_\mathrm{r} - 1)E_2.$$

On emploie maintenant les relations de passage (les deux matériaux étant isolants), ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \varepsilon_\mathrm{r} E_2 - E_1 = 0 \\ E_3 - \varepsilon_\mathrm{r} E_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} E_3 = E_1 \\ E_2 = \dfrac{E_1}{\varepsilon_\mathrm{r}} \end{cases}.$$

On calcule alors la circulation du champ électrique entre les deux armatures :

$$\begin{aligned} \int_0^e \mathrm{d}z \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e_z} &= \int_0^{z_\mathrm{d}} \mathrm{d}z E_1(z) + \int_{z_\mathrm{d}}^{z_\mathrm{d}+e'} \mathrm{d}z E_2(z) + \int_{z_\mathrm{d}+e'}^{e} \mathrm{d}z E_3(z) \\ &= z_\mathrm{d} E_1 + \left(z_\mathrm{d} + e' - z_\mathrm{d}\right) E_2 + \left(e - z_\mathrm{d} - e'\right) E_3 \\ &= \left(e - e'\right) E_1 + e' E_2 \\ &= \left[e - e'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)\right] E_1 \end{aligned}.$$

Mais cette circulation est aussi reliée à la variation de potentiel entre les deux armatures, soit finalement :

$$\left[e - e'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)\right] E_1 = U.$$

Pour poursuivre, il suffit de calculer le champ électrique E_1, qu'on peut calculer par le théorème de superposition à partir du champ électrique créé par chacune des deux armatures du condensateur, et par celui créé par chacune des deux distributions surfaciques de charges liées équivalentes du diélectrique (la densité volumique équivalente étant nulle). On obtient alors :

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma_\ell}{2\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\sigma_\ell}{2\varepsilon_0}\right) - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

inchangé par rapport au cas où il n'y avait pas de diélectrique.
Finalement, la relation entre la charge sur l'armature positive du condensateur et la tension aux bornes de ce dernier s'écrit :

$$Q = CU \text{ avec } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e - e'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)}. \tag{8}$$

On constate en particulier que si $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ ou $e' = 0$, alors on retrouve la capacité du condensateur plan. De plus, on observe que la capacité est augmentée lorsqu'on ajoute un diélectrique : en effet la variation de capacité par rapport au condensateur plan vaut

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 S}{e - e'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)} - \frac{\varepsilon_0 S}{e} = \frac{\varepsilon_0 S e'\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)}{e\left[e - e'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\right)\right]} > 0,$$

car $\varepsilon_\mathrm{r} > 1$. Enfin, si le diélectrique remplit entièrement l'espace entre les deux armatures ($e = e'$), alors, la capacité prend une expression simple :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} S}{e},$$

ce qui revient à remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}$ dans l'expression de la capacité du condensateur plan, comme nous l'avons vu en cours. Pour le plexiglas, cela revient à multiplier la capacité du condensateur plan par un facteur $\varepsilon_\mathrm{r} \simeq 3{,}5$, soit :

$$C \simeq 1\,\mathrm{nF}. \tag{9}$$

2.2 Capacité d'une ligne bifilaire

On considère deux fils électriques de rayons R et R' et de longueur ℓ dont les axes sont parallèles et situés à une distance d l'un de l'autre. Dans la suite, on supposera que $R, R' \ll d \ll \ell$.

2.2.1 Étude d'un seul fil

On s'intéresse d'abord au potentiel créé par un fil de rayon R portant une charge Q uniformément répartie.

1. Donner les symétries et les invariances du champ électrique et du potentiel électrostatique.

Solution: La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) du cylindre, donc en coordonnées cylindriques $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r,z)$ et $V(M) = V(r,z)$. De plus, on a supposé que $\ell \gg R$, de sorte qu'on peut considérer la distribution de charges invariante par translation selon l'axe (Oz). Ainsi, on en déduit que $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r)$ et $V(M) = V(r)$. Comme le potentiel ne dépend que de r, et comme $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$, on en déduit que $\boldsymbol{E}(M) = E(r)\boldsymbol{e_r}$.

2. Calculer le champ et le potentiel créés par le fil.

Solution: On va appliquer le théorème de Gauss sur un cylindre de même axe que le fil, de rayon r et de hauteur h. Comme la charge est uniformément répartie, on peut supposer que le fil porte une charge volumique $\rho = Q/(\pi R^2 \ell)$. Les flux sur les bases du cylindre sont nuls, et on obtient finalement :

$$\Phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0},$$

où la charge intérieure vaut :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \rho \pi r^2 h \text{ si } r \leq R \\ \rho \pi R^2 h \text{ si } r \geq R \end{cases}.$$

Finalement, on obtient pour le champ électrique :

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e_r} \text{ si } r \leq R \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e_r} \text{ si } r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{Qr}{2\pi\varepsilon_0 R^2 \ell}\boldsymbol{e_r} \text{ si } r \leq R \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r}\boldsymbol{e_r} \text{ si } r \geq R \end{cases}. \tag{10}$$

Pour le potentiel électrostatique, on utilise son lien avec le champ électrique, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) &= -\begin{cases} \dfrac{Qr}{2\pi\varepsilon_0 R^2 \ell} \text{ si } r \leq R \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r} \text{ si } r \geq R \end{cases} \\ V(r) &= \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2 \ell} + C_1 \text{ si } r \leq R \\ -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) + C_2 \text{ si } r \geq R \end{cases} \end{aligned},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. Premièrement, le potentiel en $r = R$ est continu, de sorte que :

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell} + C_1 \\ C_1 &= C_2 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell} \end{aligned},$$

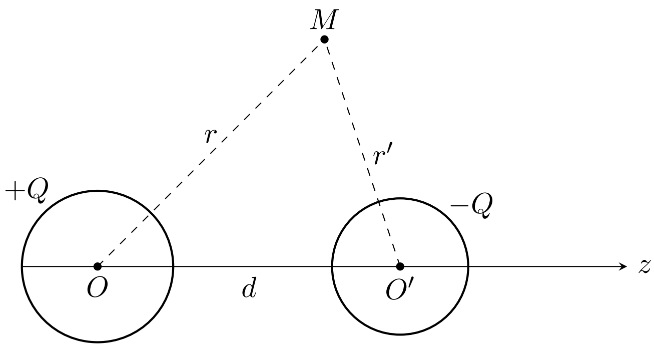
soit pour le potentiel :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q\left(R^2 - r^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 R^2 \ell} + C \text{ si } r \leq R \\ -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\dfrac{r}{R}\right) + C \text{ si } r \geq R \end{cases}, \quad (11)$$

où C est une constante.

2.2.2 Étude des deux fils

1. Donner le potentiel créé dans tout l'espace en-dehors des fils en fonction des notations du schéma ci-contre.



Solution: On utilise le résultat de la question précédente pour le potentiel créé par le fil en-dehors de son volume :

$$V(M) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{r'}{R'}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{r'R}{rR'}\right). \quad (12)$$

2. Justifier que les potentiels V_O et $V_{O'}$ sur la surface de chacun des fils peuvent être considérés constants en première approximation. Donner leurs expressions en fonction des données du problème.

Solution: Pour le fil centré sur O, quand le point M décrit la surface du cylindre, $r = R$, tandis que r' varie entre $d - R' - R$ et $d - R' + R$. Dans l'hypothèse où $R \ll d$ et $R' \ll d$, alors on peut considérer que r' est environ constant sur la surface du fil centré sur O et vaut d en première approximation, de sorte que :

$$V_O = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{d}{R'}\right). \quad (13)$$

C'est le même raisonnement qui s'applique pour l'autre fil, avec $r' = R'$ et $r \simeq d$, soit finalement :

$$V_{O'} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R}{d}\right). \quad (14)$$

3. Calculer $U = V_O - V_{O'}$ la tension entre les deux fils et en déduire la capacité C de ce système. Commenter.

Solution: La tension U entre les deux fils vaut :

$$U = V_O - V_{O'} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell} \ln\left(\frac{d^2}{RR'}\right), \tag{15}$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$U = \frac{Q}{C}, \tag{16}$$

où

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0\ell}{\ln\left(\frac{d}{\sqrt{RR'}}\right)} \tag{17}$$

désigne la capacité de ce système. On constate que la capacité diminue quand la distance entre les fils augmente ou que le rayon des fils diminue. Par ailleurs, la capacité augmente linéairement avec la longueur des fils.

4. Faire l'application numérique pour C/ℓ en prenant $R = R' = 1\,\text{mm}$ et $d = 50\,\text{cm}$. Commenter en lien avec l'exercice précédent. On donne $\ln(500) \simeq 6$.

Solution: On fait l'application numérique :

$$\begin{aligned}\frac{C}{\ell} &= \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{R}\right)} \\ &\simeq \frac{\pi \times 8{,}85 \times 10^{-12}}{\ln(500)}. \\ &\simeq \frac{3}{\ln(500)} \times 10^{-11} \\ &\simeq 5 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}\end{aligned} \tag{18}$$

Pour un fil de l'ordre du mètre, cela représente une capacité de l'ordre de $5 \times 10^{-12}\,\text{F}$. Quand on branche le condensateur plan de l'exercice précédent au multimètre pour calculer sa capacité, on doit utiliser deux fils. Ces deux fils forment un condensateur, dont la capacité est bien inférieure à la capacité du condensateur plan estimée dans l'exercice précédent. Néanmoins, cette capacité est une capacité parasite qui s'ajoute à celle du condensateur plan, d'autant plus faible que ℓ diminue. De plus, cette capacité peut fluctuer si d varie. En clair, on veillera à prendre des fils de mesure plutôt courts et fixés pendant toute la durée de l'expérience (avec du ruban adhésif par exemple) pour minimiser l'effet de cette capacité parasite.