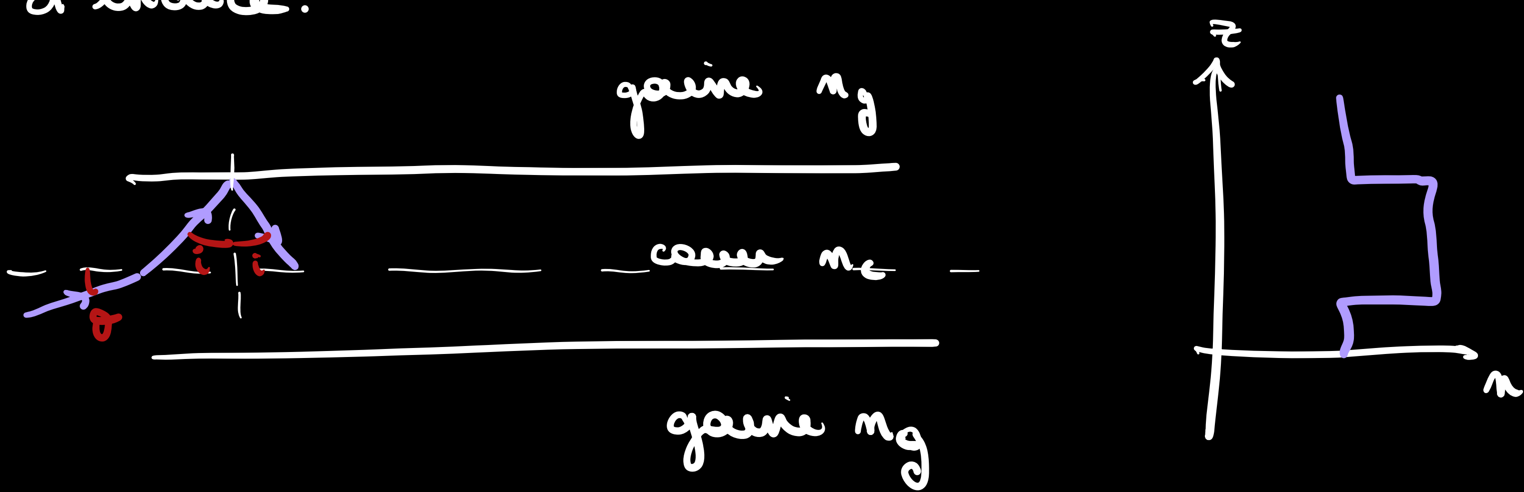
Chapitre III : PROPAGATION GUIDÉE DES ONDES

I. APPROCHE QUALITATIVE DU GUIDAGE

On va ici décrire le guidage à partir du confinem^t d'1 onde (em, acoustiq) entre 2 plans.
Le but de cette partie est de mettre en évidence les caractéristiq pp^{ales} du guidage d'onde.

1) Canalisat° de l'énergie

- On va prendre l'ex. de la fibre optiq à saut d'indice.



- On envoie l'onde em / rayon lumineux ds 1 diélectriq (coeur) entouré d'1 autre diélectriq (gaine).
- Pour obtenir 1 confinem^t de l'énergie, il faut qu'il s'effectue 1 réflexion totale.

↳ $R = 1$ et $T = 0$

- 2 sol° : → confiner à l'aide d'impédances ∞ (miroirs en EM, solides indéformables en acoustiq)
  → faire varier l'angle d'incidence (diélectriq ds la fibre optiq).

- lois de Snell-Descartes :

$$n_c \sin i > n_g \Rightarrow \sin i > \frac{n_g}{n_c}$$

$\Rightarrow$ cela impose q $\boxed{n_g < n_c}$.

DONC $\cos i = \sqrt{1-\sin^2 i} < \sqrt{1-\left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$

mais $n_c \cos i = \sin\theta$

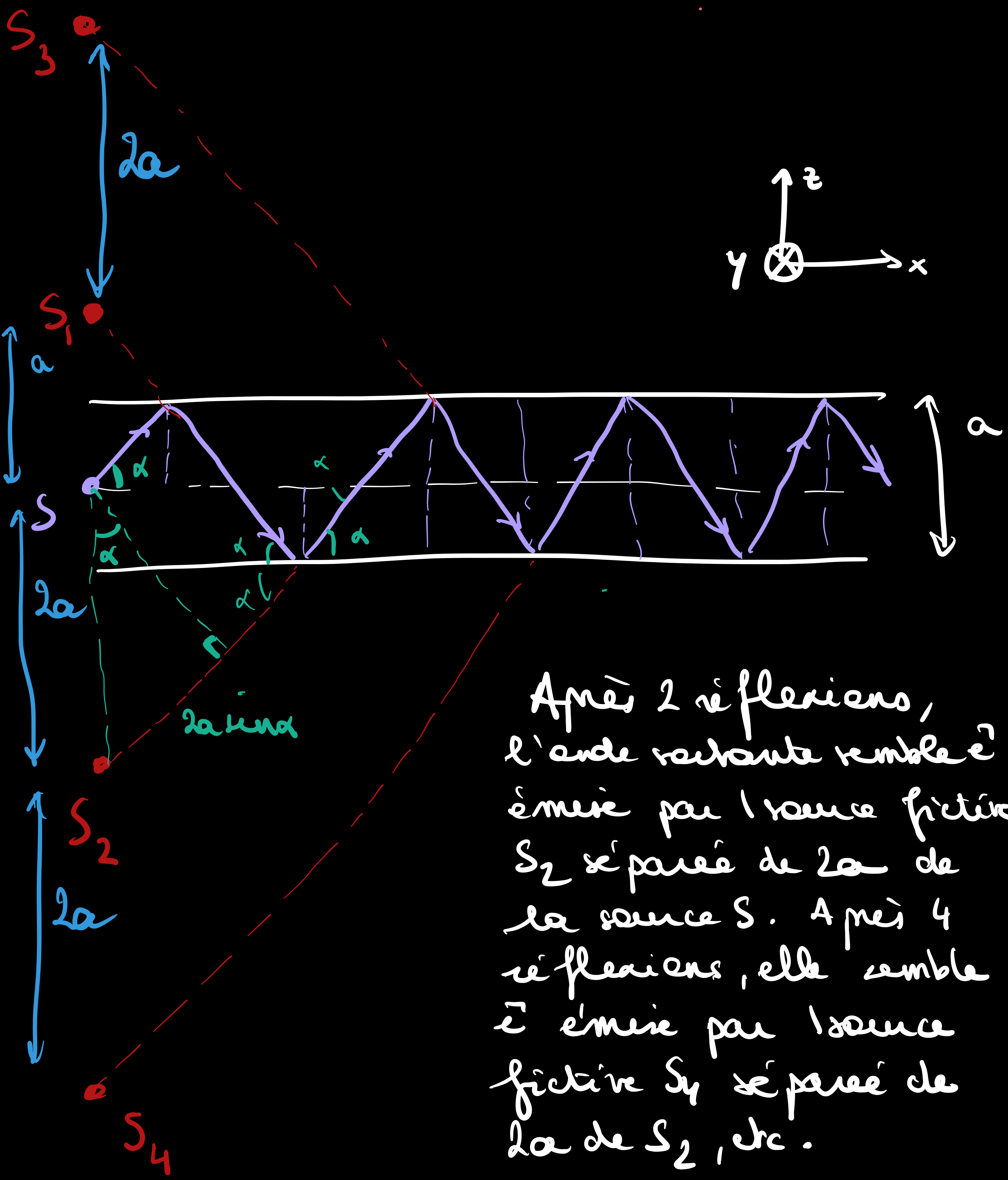
$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta < \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = ON}$$

- Déf : le guidage consiste en le confinem^t d'1 onde en vue de canaliser son énergie ds 1 domaine borné de l'espace.

2) Dispersion par les CLs

a) Fibre optiq à saut d'indice

- On étudie à quelle conditiθ 1 onde peut se propaqu'ds la fibre optiq̄



Après 2 réflexions, l'onde sortante semble ē émise par 1 source fictive S_2 séparée de $2a$ de la source S. Après 4 réflexions, elle semble ē émise par 1 source fictive S_4 séparée de $2a$ de S_2, etc.

• Tenir compte des CLs est éq. à étudier les interférences entre 1 ens^{té} de sources fictives : on aura 1 signal en sortie de la fibre si toutes les sources fictives S, S_2, S_4, etc. sont en phase.

• Or le déphasage entre S et S_2 est

$$\Delta\phi = \frac{2\pi n_c}{\lambda}\underbrace{(2a\sin\alpha)}_{\text{différence de marche}} = \frac{4\pi n_c a}{\lambda}\sin\alpha .$$

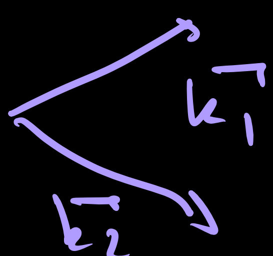
• Cela amène donc à 1 quantificat° des angles d'arrivée ds la fibre optiq :

$$\boxed{\sin\alpha_p = \frac{p\lambda}{2n_c a}}$$

λ : longueur d'onde ds le vide

• Quel est le lien avec la dispersion?

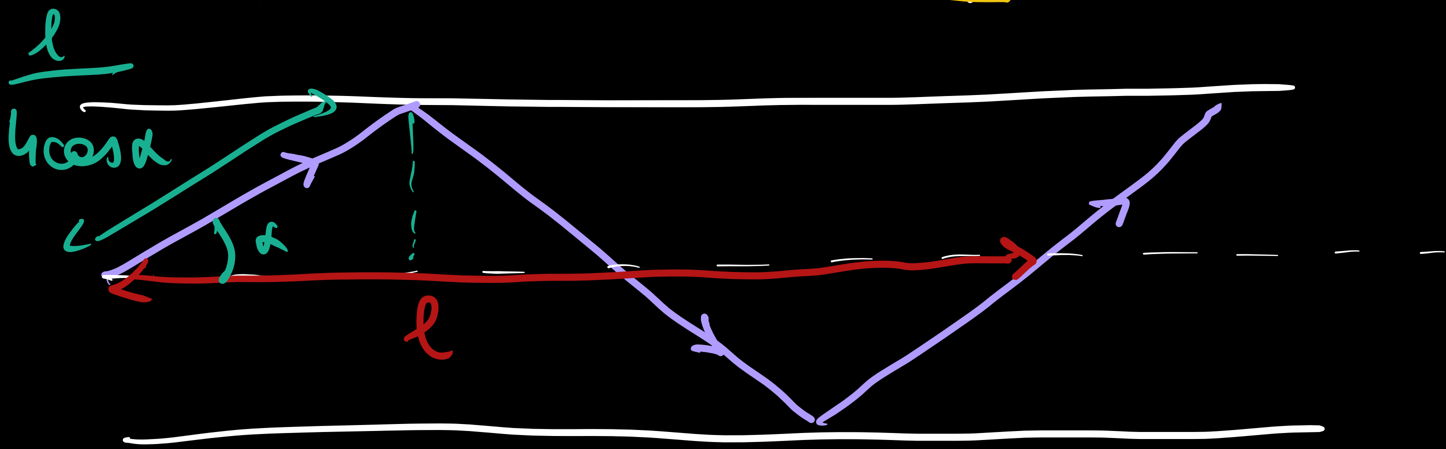
Lors ds le guide, il y a superposi° de 2 OPPS



$$\begin{cases} \vec{k_1} = \dfrac{2\pi n_c}{\lambda}\left[\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}\right] \\ \vec{k_2} = \dfrac{2\pi n_c}{\lambda}\left[\cos\alpha\, \vec{e_x} - \sin\alpha\, \vec{e_y}\right] \end{cases}$$

L'onde qui se propage selon $\vec{e_x}$ avec le vecteur $\vec{k_g}$

La apparition d'OS selon $\vec{e_y}$.



k_g t.q $\frac{d\omega}{dk_g} = v_g = \frac{l}{\Delta t}$ où Δt durée du trajet de l'onde

Or $\Delta t = 4 \cdot \left(\frac{l}{4\cos\alpha}\right) / \left(\frac{c}{n_c}\right) = \frac{n_c l}{c\cos\alpha}$

$\Rightarrow v_g = \frac{c}{n_c}\cos\alpha = \frac{d\omega}{dk_g} \Rightarrow \frac{dk_g}{d\omega} = \frac{n_c}{c\cos\alpha}$

- On peut alors en déduire le vecteur d'onde traduisant la propagation selon $\vec{e_x}$:

$$\frac{dk_{g,p}}{d\omega} = \frac{n_c}{c\cos\alpha_p} = \frac{n_c}{c\sqrt{1-\sin^2\alpha_p}}$$

↳ $\dfrac{dk_{g,p}}{d\omega} = \dfrac{n_c}{c\sqrt{1-\left(\frac{p\lambda}{2n_c a}\right)^2}} = \dfrac{n_c}{c\sqrt{1-\left(\frac{p\pi c}{\omega n_c a}\right)^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{dk_{g,p}}{d\omega} = \dfrac{n_c\,\omega}{c\sqrt{\omega^2-\left(\frac{p\pi c}{n_c a}\right)^2}}$

$\Rightarrow k_{g,p} = \dfrac{n_c}{c}\sqrt{\omega^2-\left(\dfrac{p\pi c}{n_c a}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{k_{g,p}^2 = \dfrac{\omega^2-\omega_{c,p}^2}{(c/n_c)^2}}$

où $\boxed{\omega_{c,p} = \dfrac{2\pi c}{\lambda_{c,p}} = \dfrac{p\pi c}{n_c a} \text{ avec } p\in\mathbb{N}}$

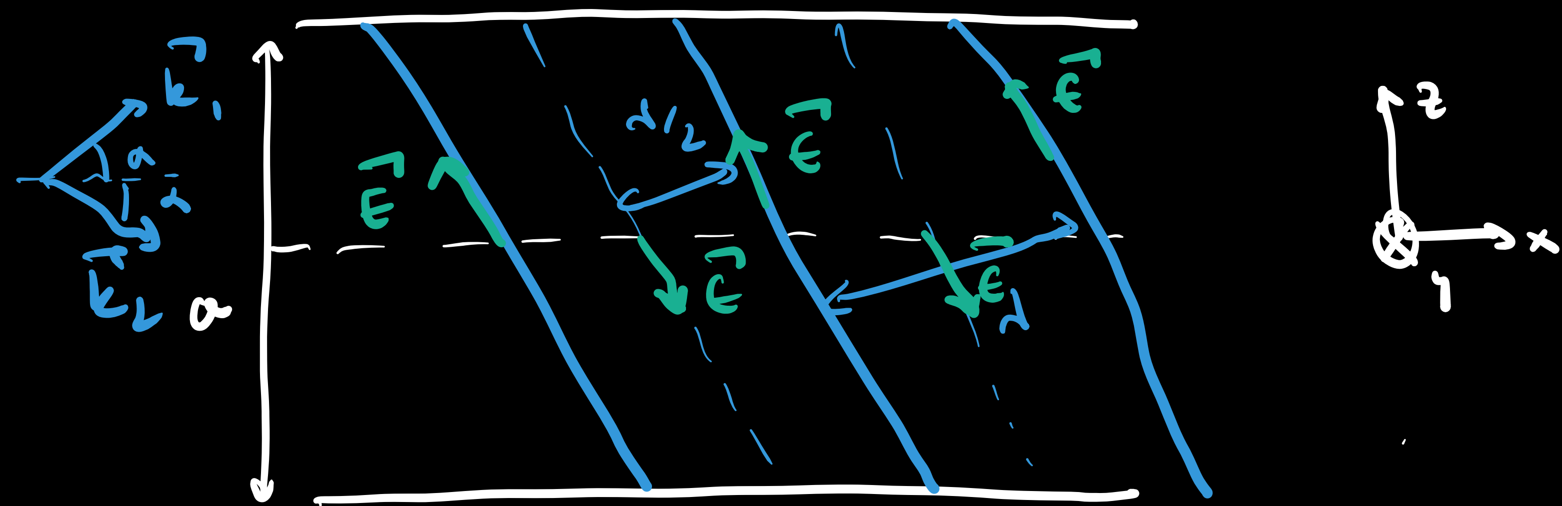
- les CLs induisent de la dispersion, m̂ si le milieu de propagat° est non dispersif.
- On trouve 1 RD analogue à celle de l'eqn de KG : le confinemᵗ impose des fréq. seuil caractéristiq̄ au syst.

↳ on a vu ds le chapitre précédent q̄ cela induisait de la dispersion.

↳ on a 1 nbre ∞ dénombrable de pulsat° propres : c'est la csq des CLs et de l'apparit° d'OS selon la direct° $\vec{e_z}$ comme nous le verrons par la suite.

b) Onde ep entre 2 miroirs

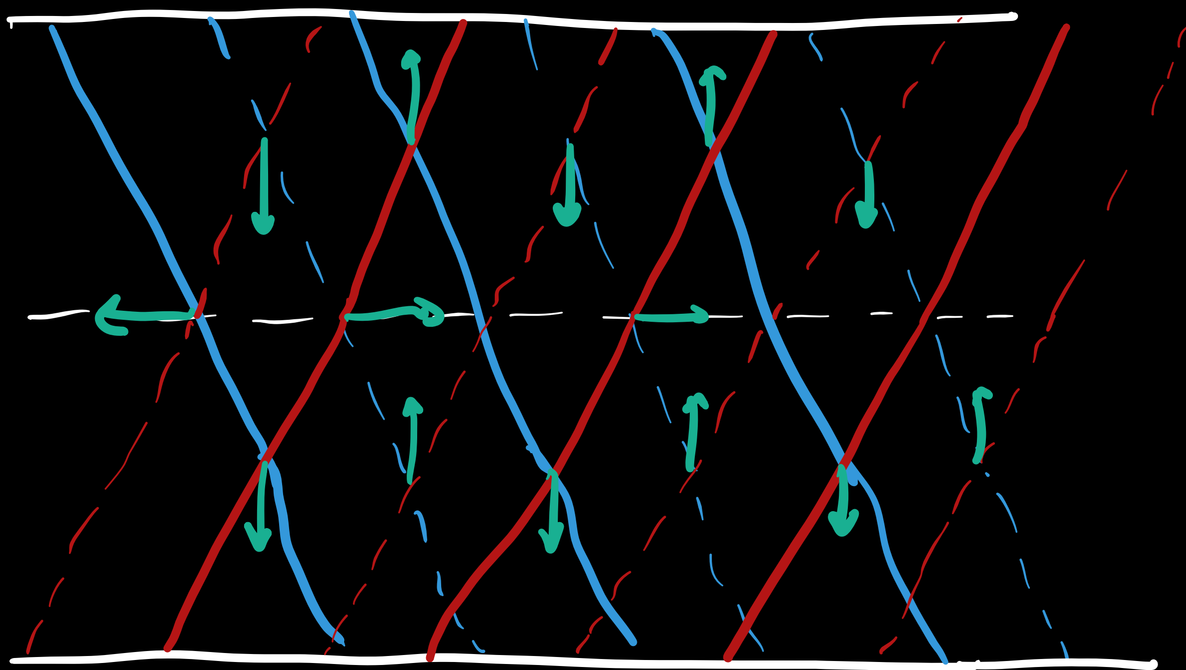
• On considère 1 espace ∞ délimité par 2 conducteurs parfaits (miroirs).



• Par CONT de la composante transverse de E, $\vec{E}$ est normal aux conducteurs.

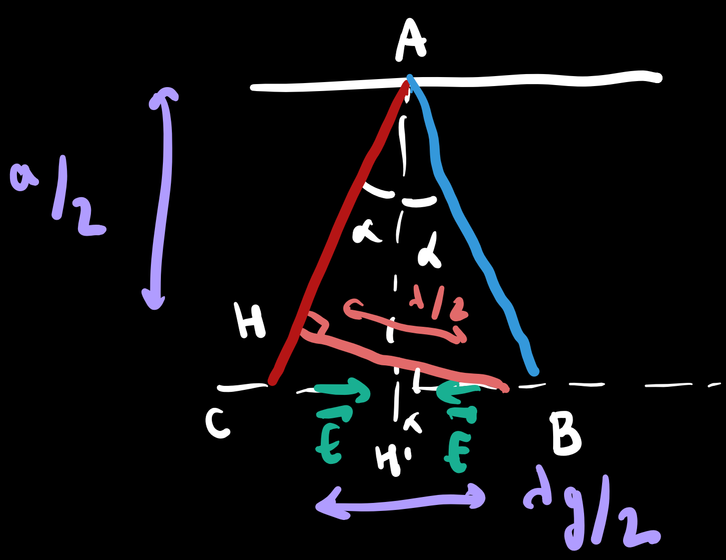
• On considère 1 OPPS t.q $\vec{k_1} = k(\cos\alpha\,\vec{e_x} + \sin\alpha\,\vec{e_z})$
↳ 1 telle onde ne vérifie pas les CLs car le chp $\vec{E}$ doit s'annuler sur les miroirs alors q̄ l'état vibratoire est le m̂ en tt pt du plan.

• On considère donc 1 2nde OPPS t.q $\vec{k_2} = k(\cos\alpha\, \vec{e_x} - \sin\alpha\, \vec{e_z})$ et on s'intéresse au chp résultant des 2 OPPS.



Rq: On choisit les 2 OPPS t.q elles soient en oppositᵒ de φ en $z=0$

• CSQ: le chp résultant sera solᵒ à la conditᵒ q les miroirs soient placés là où $\vec{E} \parallel \vec{e_z}$.



→ Δ ABH'

$$\frac{\lambda_g}{4} = \frac{a}{2}\tan\alpha$$

$$\lambda_g = 2a\tan\alpha$$

→ Δ CBH

$$\lambda/2 = (\lambda_g/2)\cos\alpha$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_g^2 = 4a^2 \tan^2\alpha = 4a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)$$

$$= 4a^2\left(\frac{\lambda_g^2}{\lambda^2} - 1\right)$$

$$1 = \frac{4a^2}{\lambda_g^2}\left(\frac{\lambda_g^2}{\lambda^2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{4a^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad \text{où } \lambda_c = 2a}$$

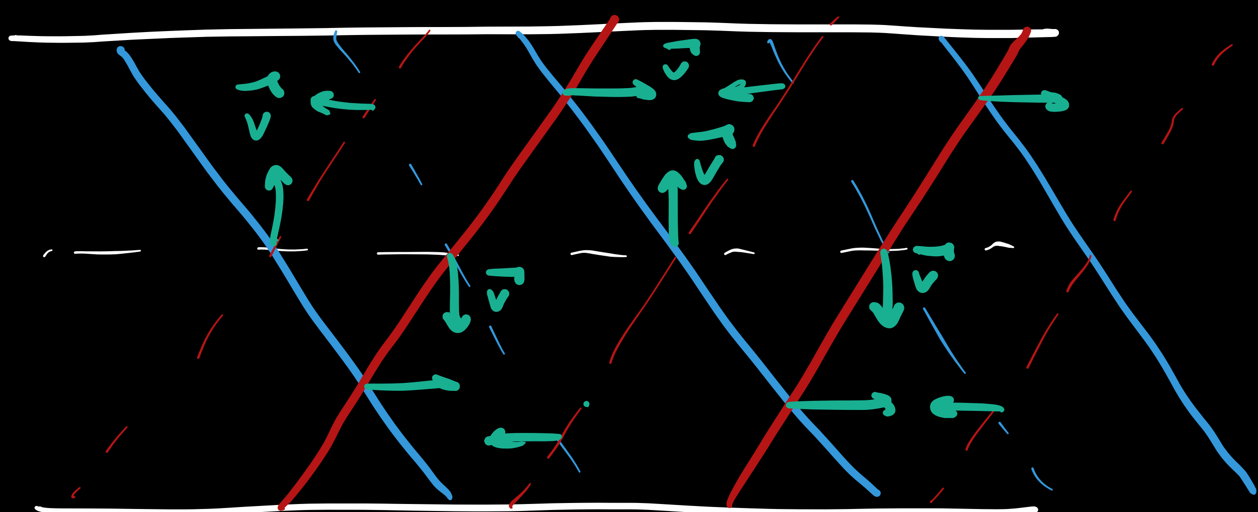
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad \text{où } \omega_c = \frac{\pi c}{a}}$$

- On retrouve les résultats énoncés précédemment concernant la dispersion, correspondant à l sélecᵒ angulaire en $\vec{k}$, ainsi q̄ le fait que l'on Σ 2 OPPS de vecteurs d'onde ≠, ce qui conduit à l'onde progressive selon $\vec{e_x}$ et stationnaire selon $\vec{e_z}$.

• Rq : Notre analyse ici ne nous a permis de trouver q̄ la 1ère pulsat° de coupure, contrairem^t à l'exple précédent. On verra en réalité q̄ ds ce cas aussi, il y a 1 nbre ∞ de pulsat° de coupure caractéristiq.

c) Ondes acoustiq entre 2 solides indéformables

• On s'inspire de l'exp α : on souhaite confiner l'onde acoustiq : pour cela on sandwiche le milieu par 2 syst. de haute impédance acoustiq, de sorte q̄ la composante normale du chp de vitesse s'annule aux bords.



⚠ Ici le chp de vitesse $\vec{v}$ et ⊥ aux plans d'onde (onde longitudinale)

• Là encore, on ne peut pas mettre le guide

d'onde n'importe où, mais uniquement là où $\vec{v} \parallel \vec{e_x}$.
↳ on trouvera alors la m̂ RD.

· Rq : Ici aussi, en réalité, il y a 1 nbre de pulsation de coupure caractéristiq̄.

II. ETUDE QUANTITATIVE DU GUIDAGE ENTRE DEUX PLANS

1) Mise en eqn

• On le fait ds le cas em entre 2 miroirs. Ds ce cadre, l'em a l'acoustiq̄ présentent de nbreuses similarités, mais aussi qques ≠ q̄ nous mentionnerons à la fin.

• Pour cela, on part des relation de couplage ; i.e. des eqns de Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

• On ajoute égalem^t les CLs en utilisant la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$:

$$E_x(x,y,0,t) = E_x(x,y,a,t) = 0$$
$$E_y(x,y,0,t) = E_y(x,y,a,t) = 0$$

$$B_z(x,y,0,t) = B_z(x,y,a,t) = 0$$

- On cherche 1 sol° se propageant selon x et par linéarité des eqns, on peut considérer des ondes sinusoïdales :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}(x,\cancel{y},z)\,e^{i\omega t}, \\ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0}(x,\cancel{y},z)\,e^{i\omega t}. \end{cases}$$

invariance par translat° selon $\vec{e_y}$

- On obtient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial x} + \dfrac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial x} + \dfrac{\partial \underline{B_{0,z}}}{\partial z} = 0 \\ -\dfrac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial z} = -i\omega \underline{B_{0,x}} \\ \dfrac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial z} - \dfrac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial x} = -i\omega \underline{B_{0,y}} \\ \dfrac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial x} = -i\omega \underline{B_{0,z}} \\ -\dfrac{\partial \underline{B_{0,y}}}{\partial z} = \dfrac{i\omega}{c^2} \underline{E_{0,x}} \\ \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial z} - \dfrac{\partial \underline{B_{0,z}}}{\partial x} = \dfrac{i\omega}{c^2} \underline{E_{0,y}} \\ \dfrac{\partial \underline{B_{0,y}}}{\partial x} = \dfrac{i\omega}{c^2} \underline{E_{0,z}} \end{cases}$$

– ne couplent que $\underline{E_{0,x}}$, $\underline{E_{0,z}}$, $\underline{B_{0,y}}$

– ne couplent que $\underline{B_{0,x}}$, $\underline{B_{0,z}}$, $\underline{E_{0,y}}$

- On peut donc par linéarité étudier les 2 familles de sol° t.q

- TE $\begin{cases} E_{0,x} = 0 \\ E_{0,y} \neq 0 \\ E_{0,z} = 0 \end{cases}$

car $\vec{E} \parallel \vec{e_y} \perp \vec{e_x}$: dir° de propag.

- TM $\begin{cases} E_{0,x} \neq 0 \\ E_{0,y} = 0 \\ E_{0,z} \neq 0 \end{cases}$

car $\vec{B} \parallel \vec{e_y}$

- Par linéarité, on peut chercher les sol° avec 1 dépendance ~ en x :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}(z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_0}}(z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \end{cases}$$

2) Calcul des modes

a) Modes TE

- Ainsi ds le cas des sol° TE, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{E_{0,y}}}{dz} = i\omega \underline{B_{0,x}} \\ k_g \underline{E_{0,y}} = \omega \underline{B_{0,z}} \\ \dfrac{d\underline{B_{0,x}}}{dz} + i k_g \underline{B_{0,z}} = \dfrac{i\omega}{c^2} \underline{E_{0,y}} \end{cases}$$

qu'on peut réécrire en 1 eqn vérifiée par $\underline{E_{0,y}}$, $\underline{B_{0,x}}$ et $\underline{B_{0,z}}$:

$$\frac{d^2 \underline{E_{0,y}}}{dz^2} = i\omega\left(\frac{i\omega}{c^2}\underline{E_{0,y}} - ik_g \underline{B_{0,z}}\right)$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{E_{0,y}} + k_g^2 \underline{E_{0,y}}$$

eqn de Helmholtz

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \underline{E_{0,y}}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right)\underline{E_{0,y}} = 0}$$

- Rq: On retrouve l'eqn de D'Alembert en TF → ouf !

- Il faut maintenant résoudre avec les CLs : $\underline{E_{0,y}}(0) = \underline{E_{0,y}}(a) = 0$

↳ pour avoir 1 sol° non triviale, il faut q̄ $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$ (sol° oscillante) et

ds ce cas, on a :

$$\underline{E_{0,y}}(z) = A\cos(\alpha z) + B\sin(\alpha z).$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\alpha a) + B\sin(\alpha a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sin(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (car $n \to -n$ revient juste à inverser le sens de $\vec{E}$).

- Rq: Si $A = 0$ alors le chp est nul, idem si $n = 0$.

• CCL : 1) Du fait de confinement latéral de l'onde, on observe comme attendu l'apparition de modes, appelés modes TE_n, correspondant à l quantification des vecteurs d'onde ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E}_n = \vec{e_y}\, E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos\left(\omega t - k_{g,n} x + \varphi_n\right) \\ \vec{B}_n = \vec{e_z}\, E_{0,n} \frac{k_{g,n}}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \cos\left(\omega t - k_{g,n} x + \varphi_n\right) \\ \quad + \vec{e_x}\, E_{0,n} \frac{n\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\omega t - k_{g,n} x + \varphi_n\right) \end{cases}}$$

→ jamais l structure d'onde plane $\vec{B}_n \cdot \vec{e_x} \neq 0$

2) On retrouve la RD obtenue qualitativement mais aussi on a tous les modes, alors que précédemment, on avait que le mode TE_1 :

$$\boxed{k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}, \quad \omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{a}}$$

3) On a obtenu la structure (polarisation du mode) :

→ $\vec{E} \parallel \vec{e_y}$: transverse elec.

→ $B_x \neq 0$: non transverse mag.

→ onde progressive selon x

→ onde stationnaire selon z

4) On peut mq l'énergie se propage bien selon $\vec{e_x}$, comme attendu pour ce dispositif :

$$\vec{\Pi_n} = \left\langle \frac{\vec{E_n} \times \vec{B_n}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_{0,n}^2}{2\mu_0 \omega} k_{g,n} \sin^2\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e_x}$$

- RQ : On parle de mode bien q l'onde ne soit pas stationnaire (elle l'est uniquem^t selon z).

b) Modes TM

- Pour les sol° TM, on a les eqns :

$$\begin{cases} -ik_g E_{0,x} + \dfrac{dE_{0,z}}{dz} = 0 \\ \dfrac{dE_{0,x}}{dz} + ik_g E_{0,z} = -i\omega B_{0,y} \\ -\dfrac{dB_{0,y}}{dz} = \dfrac{i\omega}{c^2} E_{0,x} \end{cases}$$

$$-k_g B_{0\perp y} = \frac{\omega}{c^2} E_{0\perp z}$$

$+$ CLS $\begin{cases} \dfrac{dB_{0\perp y}}{dz}(x,y,0,t) \propto E_{0\perp x}(x,y,0,t) = 0 \\ \dfrac{dB_{0\perp y}}{dz}(x,y,a,t) = 0 \end{cases}$

- On trouve alors la m̂ eqn pour $B_{0\perp y}$ q̄ $E_{0\perp y}$ qu'on résout en:

$$B_{0\perp y}(z) = A\cos(\alpha z) + B\sin(\alpha z)$$

$$\begin{cases} B\alpha = 0 \\ -A\alpha\sin(\alpha a) + B\alpha\cos(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{B}_n = B_0\cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - k_{g,n}x)\,\vec{e_y} \\ \vec{E}_n = B_0\frac{n\pi c^2}{a\omega}\sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - k_{g,n}x)\,\vec{e_x} \\ \quad - \frac{k_{g,n}c^2}{\omega}B_0\cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - k_{g,n}x)\,\vec{e_z} \end{cases}}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ + m̂ RD

- Contrairement aux modes TE_n pour lesquels $n \geq 1$, les modes TM_n autorisent le canal $n=0$. Dans ce cas, on a :

$$TM_0 \begin{cases} \vec{B} = B_0 \vec{e_y} \cos(\omega t - k_{g,0} x) \\ \vec{E} = -\dfrac{\omega}{k_{g,0} c^2} B_0 \cos(\omega t - k_{g,0} x) \vec{e_z} \end{cases}$$

avec $k_{g,0} = \dfrac{\omega}{c}$

→ le mode TM_0 a 1 structure d'onde plane, et ne sent pas les CLs (RD ds le vide).

- les modes TE+TM représentent 1 base de sol° de toute onde se propageant ds le guide.

c) Cas des ondes acoustiq

- On a vu ds le 1er chap. q̄ les eqns de couplage s'écrivaient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p \end{cases} \quad + \text{CLs} \begin{cases} v_z(x,y,0,t) \\ = v_z(x,y,a,t) \\ = 0 \end{cases}$$

• On cherche des sol°

$$\begin{cases} \underline{p}(x,z,t) = \underline{p_0}(z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \underline{\vec{v}}(x,z,t) = \underline{\vec{v}_0}(z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \end{cases}$$

• On obtient alors

$$\begin{cases} i\omega \underline{p_0} = \dfrac{i k_g}{\chi_s} \underline{v_{0,x}} - \dfrac{1}{\chi_s} \dfrac{d\underline{v_{0,z}}}{dz} \\ i\omega \underline{v_{0,x}} = \dfrac{i k_g}{\rho_0} \underline{p_0} \\ i\omega \underline{v_{0,y}} = 0 \\ i\omega \underline{v_{0,z}} = -\dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{d\underline{p_0}}{dz} \end{cases}$$

• On en déduit q̄ $\underline{v_{0,x}} = \dfrac{k_g}{\omega \rho_0} \underline{p_0}$

$$\Rightarrow i\omega \underline{p_0} = \frac{i k_g^2}{\omega \rho_0 \chi_s} \underline{p_0} - \frac{1}{\chi_s} \frac{d\underline{v_{0,z}}}{dz}$$

$\frac{d}{dz}$

$$\Rightarrow \omega^2 \rho_0 \underline{v_{0,z}} = \frac{k_g^2}{\chi_s} \underline{v_{0,z}} - \frac{1}{\chi_s} \frac{d^2\underline{v_{0,z}}}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v_{0,1z}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) v_{0,1z} = 0$$

$$\text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

$$\Rightarrow v_{0,1z}(z) = A\sin(\alpha z) + B\cos(\alpha z)$$

$$\text{avec } \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$$

$$v_{0,1z}(0) = v_{0,1z}(a) = 0 \iff \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \text{ ou } \sin(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} p_n = p_0 \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - k_{g,n} x) \\ \vec{v}_n = \frac{p_0 k_{g,n}}{\rho_0 \omega}\cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - k_{g,n} x)\,\vec{e}_x \\ \quad + \frac{n\pi}{\rho_0 \omega a} p_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin(\omega t - k_{g,n} x)\,\vec{e}_z \end{cases}}$$

pour $\underline{n \in \mathbb{N}}$ + $\underline{\hat{m}\ \text{RD}}$.

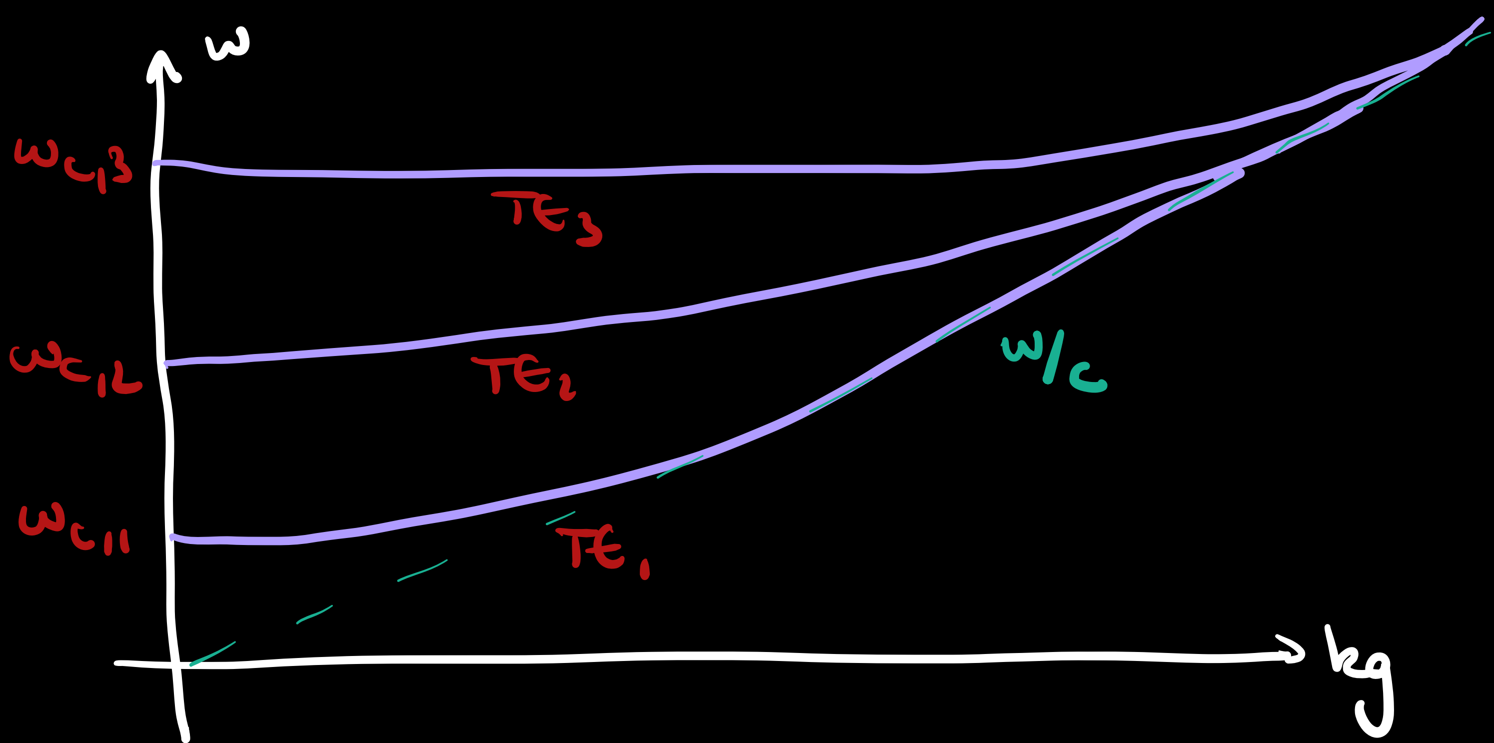
↳ analogue aux modes TM en em où p joue le rôle de $\vec{B}$ et $\vec{v}$ le rôle de $\vec{E}$.

⚠ Cependant q les ondes acoustiq sont longitudinales alors q les ondes em sont transverses (les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{v}$ sont inversées).

3) Analyse de la dispersion

• On trace les RDs des ≠ modes TE.

Rq : On parle de RD bien q l'onde ne soit pas 1 OP^3S. C'est parce qu'on a tenu compte des CLs, mais l'onde a 1 structure propagative selon $\vec{e_x}$, et on rappelle qu'elle s'obtient par Σ de 2 OP^3S qui vérifient cette RD.



- Imaginons qu'on envoie 1 signal monochromatiq de pulsation ω (à priori il se décompose sur tous les modes) :

  → $\omega < \omega_{c,1}$: rien n'est transmis

  $kg^2 < 0$ → l'onde est évanescente et est totalem^t réfléchie à l'entrée du guide.

  → $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$: → seule la composante du signal sur le 1^er^ canal (mode TE_1/TM_1) peut se propager.

  ⇒ on parle de guide d'onde monomode.

  → $\omega > \omega_{c,2}$ → les composantes sur tous les canaux t.q $\omega_{c,n} < \omega$ peuvent se propager

  ⇒ on parle de guide d'onde multimode.

- Il y a alors ≠ sources de dispersion :

  * dispersion intermode : à ω donné, les composantes selon les ≠ canaux ne se propagent à la m̂ vitesse car

$$v_{\varphi,n} = \frac{\omega}{k_{g,n}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_{c,n}/\omega)^2}}$$

$\Rightarrow$ 1 signal va se déformer ds le guide

* dispersion intramode : pour 1 paquet d'onde ds 1 seul canal, en a :

$$v_{g,n} = \frac{d\omega}{dk_{g,n}} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}$$

et donc le paquet d'onde va se déformer

* dispersion par le milieu : dispersion induite par le milieu ds le guide s'il est complexe.

- Pour limiter la dispersion :

  1) choisir 1 milieu t.q ds 1 certaine gamme de fréq., la dispersion par le milieu compense la dispersion intramode.

  ex : fibres optiq

  ↳ cela n'est possible q̃ pour 1 guide monomode car compenser les 2 sources de dispersion est imp. sur plusieurs modes.

2) considérer 1 guide d'onde mono mode, soit :

$$\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2} \iff \boxed{a < \lambda < 2a}$$

où λ est la longueur d'onde ds le vide (pas de bords)

↳ on retiendra q̄ pour faire 1 guide d'onde monomode avec 2 plans, il faut q̄ la dim. du guide soit de l'ordre de λ.

ex : acoustiq̄ $f = 1\,kHz$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 34\,cm \quad \text{OK}$$

em $f = 1\,kHz \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 3.10^5\,m$
$= 300\,km$

↳ imp : en TP on utilise autre chose (câble coax.)

↳ par contre ce sera possible ds le domaine des ondes centimétriq.

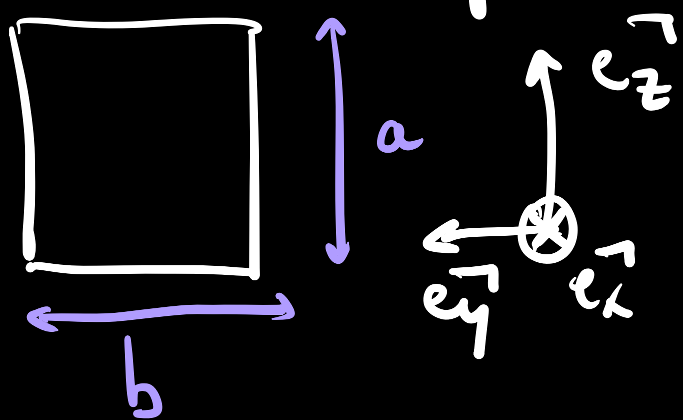
• Applicat° : plasma ionosphériq̄ joue le

rôle d'1 miroir parfait < à sa pulsat° plasma $\omega < \omega_p$ avec $f_p = 1\text{-}10$ MHz.
⇒ guide d'onde pour les ondes radio.

4) Guidage rectangulaire

a) Résumé des résultats

- En pratiq, afin de canaliser mieux l'énergie, on fait des guides d'onde rectangulaires



- On obtient des résultats similaires mais avec 1 quantificat° supplémentaire du fait du confinem^t selon $\vec{e_y}$ (ondes stationnaires selon y).

- On aura des modes TE_{mn} et TM_{mn} indexés par 2 entiers (m,n)

$$\boxed{k_{g,mn}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,mn}^2}{c^2} \quad \text{où } \omega_{c,mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$$

↳ on aura tjs de la dispersion car pour les modes TE, $(n,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tandis q̄ pour les modes TM, $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

b) Mise en eqn

- On cherche des sol° propagatives selon x et harmoniq.

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{E_0}}(y,z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \underline{\vec{B}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{B_0}}(y,z)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \end{cases}$$

- En réinjectant cette forme dans les eqns de Maxwell, on trouve

$$-ik_g \underline{E_{0,x}} + \frac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$-ik_g \underline{B_{0,x}} + \frac{\partial \underline{B_{0,y}}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{B_{0,z}}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial z} = -i\omega \underline{B_{0,x}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial z} + ik_g \underline{E_{0,z}} = -i\omega \underline{B_{0,y}} \quad (4)$$

$$-ik_g \underline{E_{0,y}} - \frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial y} = -i\omega \underline{B_{0,z}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \underline{B_{0,z}}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{B_{0,y}}}{\partial z} = \frac{i\omega}{c^2} \underline{E_{0,x}} \quad (6)$$

$$\frac{\partial B_{0,x}}{\partial z} + ik_g B_{0,z} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0,y} \quad (7)$$
$$-ik_g B_{0,y} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0,z} \quad (8)$$

- Il faut ensuite vérifier les CLs

$$\begin{cases} E_{0,x}(x,y,0,t) = E_{0,x}(x,y,a,t) = 0 \\ E_{0,y}(x,y,0,t) = E_{0,y}(x,y,a,t) = 0 \\ B_{0,z}(x,y,0,t) = B_{0,z}(x,y,a,t) = 0 \\ E_{0,x}(x,0,z,t) = E_{0,x}(x,b,z,t) = 0 \\ E_{0,z}(x,0,z,t) = E_{0,z}(x,b,z,t) = 0 \\ B_{0,y}(x,0,z,t) = B_{0,y}(x,b,z,t) = 0 \end{cases}$$

- Entre les 2 conducteurs, on est ds le vide DONC les chps $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient l'EOC, par exemple pour la composante selon x de $\vec{E}$:

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{0,x}}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) E_{0,x} = 0$$

- On procède par séparation des variables

$$E_{0,x}(y,z) = F(y)\,G(z)$$

$$\Rightarrow \frac{F''(y)}{F(y)} + \frac{G''(z)}{G(z)} + \frac{\omega^2}{c^2} - kg^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(y) = -\beta^2 F(y) \\ G''(z) = -\alpha^2 G(z) \end{cases}$$ avec $\frac{\omega^2}{c^2} - kg^2 = \alpha^2 + \beta^2$

- Les CLs imposent $\alpha^2 > 0$ et $\beta^2 > 0$, de sorte $\bar{q}$

$$\begin{cases} F(y) = C\sin(\beta y) + D\cos(\beta y) \\ G(z) = A\sin(\alpha z) + B\cos(\alpha z) \end{cases}$$

- En utilisant les CLs, on trouve

$$\begin{cases} B = D = 0 \\ A\sin(\alpha a) = 0 \quad \text{et } C\sin(\beta b) = 0 \end{cases}$$

- Cela est éq. à dire $\bar{q}$ α et β ne peuvent prendre qu'l nbre discret de valeurs:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \quad \text{avec } n, m \in \mathbb{Z}$$

- On peut procéder pareillem^t pour $\underline{B_{0,x}}$.

$\hookrightarrow \dfrac{\partial^2 \underline{B_{0,x}}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{B_{0,x}}}{\partial z^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) \underline{B_{0,x}} = 0$

et séparat° des variables $\underline{B_{0,x}}(y,z) = F(y)G(z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(y) = -\beta^2 F(y) \\ G''(z) = -\alpha^2 G(z) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$$

- $\underline{\text{CLs}}$: $\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial z}(x,y,0,t) = \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial z}(x,y,a,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial y}(x,0,z,t) = \dfrac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial y}(x,b,z,t) = 0 \end{cases}$

(à partir des eqns (7) et (8)).

$$\Rightarrow \begin{cases} F(y) = C' \cos(\beta y) \\ G(z) = A' \sin(\alpha z) \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{n\pi}{a} \\ \beta_m = \dfrac{m\pi}{b} \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

- on combine alors les eqns de Maxwell

$\dfrac{\partial}{\partial z}(2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(6)$:

$$\Rightarrow -ik_g \frac{\partial B_{0,x}}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_{0,z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_{0,z}}{\partial y^2} = \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 B_{0,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_{0,z}}{\partial z^2} = \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} + ik_g \frac{\partial B_{0,x}}{\partial z} \quad (9)$$

$\Rightarrow$ en procédant pareillem^t pour toutes les composantes, on en déduit qu'elles s'expriment toutes en f° de $\underline{E_{0,x}}$ et $\underline{B_{0,x}}$.

↳ on pourra écrire tte sol° comme superposition de sol° pour lesquelles $\underline{E_{0,x}} = 0$ (mode TE) et pour lesquelles $\underline{B_{0,x}} = 0$ (mode TM).

c) Calcul des modes TE

- **Sol° en mode TE :** $\underline{E_{0,x}} = 0$

$$\frac{\partial E_{0,y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{0,z}}{\partial z} = 0 \quad (1')$$

$$k_g E_{0,z} = -\omega B_{0,y} \quad (4') \qquad \frac{\partial B_{0,z}}{\partial y} = \frac{\partial B_{0,y}}{\partial z} \quad (6')$$

$$k_g E_{0,y} = \omega B_{0,z} \quad (5')$$

et $\frac{\partial^2 B_{0,t}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_{0,z}}{\partial z^2} = ik_g \frac{\partial B_{0,x}}{\partial z}$ (9')

On en déduit alors les sol° en mode TE

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_{nm} = \frac{E_{0,nm}}{b}\Big[& nb \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm}x)\,\vec{e_y} \\ & - ma \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm}x)\,\vec{e_z}\Big]\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}_{nm} = \frac{E_{0,nm}}{b}\Big[& nb\, \frac{k_{g,nm}}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm}x)\,\vec{e_z} \\ & + \frac{k_{g,nm}}{\omega}\, ma \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm}x)\,\vec{e_y} \\ & + \frac{\pi}{ab\omega}\left(n^2 b^2 + m^2 a^2\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - k_{g,nm}x)\,\vec{e_x}\Big]\end{aligned}}$$

pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

avec la R.D. $\boxed{\begin{cases} k_{g,nm}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_{c,nm}^2}{c^2} \\ \omega_{c,nm} = \sqrt{\left(\dfrac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi c}{b}\right)^2} \end{cases}}$

- Rq: les modes TE_{n0} correspondent aux modes TE_n du guide d'ondes entre 2 plaq cd.

d) Calcul des modes TM

- Calcul des modes TM : $\underline{B_{0,x}} = 0$

$$\frac{\partial \underline{B_{0,y}}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{B_{0,z}}}{\partial z} = 0 \quad (2')$$

$$\frac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial z} \quad (3') \qquad k_g \underline{B_{0,y}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{E_{0,z}} \quad (8')$$

$$k_g \underline{B_{0,z}} = \frac{\omega}{c^2} \underline{E_{0,y}} \quad (7')$$

et $$\frac{\partial^2 \underline{B_{0,z}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{B_{0,z}}}{\partial z^2} = \frac{i\omega}{c^2} \frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial y} \quad (9')$$

On en déduit alors les sol° en mode TM :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}_{nm} = \frac{B_{0,nm}}{a}\Big[& nb \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm} x)\,\vec{e_y} \\ & - ma \sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm} x)\,\vec{e_z}\Big]\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_{nm} = B_{0,nm}\,\frac{c^2}{a\omega}\Big[& -nb\,k_{g,nm} \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm} x)\,\vec{e_z} \\ & + ma\,k_{g,nm} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_{g,nm} x)\,\vec{e_y} \\ & + \frac{\pi}{ab}\left(n^2b^2 + m^2a^2\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - k_{g,nm} x)\,\vec{e_x}\Big]\end{aligned}}$$

pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et la m̂ RD.

RQ : * Si $n=0$ ou $m=0$ alors le mode TM est identiquem^t nul.
* On ne retrouve pas les modes TM_n du guide entre 2 plans ∞.

- En particulier, on notera qu'il y a tjs de la dispersion : il n'existe pas de mode TEM, qui correspondrait à $(m,n)=(0,0)$.

5) Vers l'approche ⊕ réaliste du guidage

a) Existence du mode TEM

- On a vu qu'il existait 1 mode TEM (TM_0) pour le guidage entre 2 plans, mais qu'il disparaissait ds 1 guide d'ondes rectangulaire (⊕ réaliste).
- Ce mode est enviable car la propagat° selon

ce canal se fait de manière non dispersive.

- On se demande sous quelle condi° 1 mode TEM existe. Pour cela, on cherche 1 sol° TEM :

$$\begin{cases} \vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E_0}}(y,z)e^{i(\omega t - k_g x)} & \text{avec } \vec{\underline{E_0}} \cdot \vec{e_x} = 0 \\ \vec{\underline{B}} = \vec{\underline{B_0}}(y,z)e^{i(\omega t - k_g x)} & \vec{\underline{B_0}} \cdot \vec{e_x} = 0 \end{cases}$$

- Eqns de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{E}} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{E_0}} - ik_g \vec{e_x} \cdot \vec{\underline{E_0}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{E_0}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\underline{E}} = -\frac{\partial \vec{\underline{B}}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\underline{E_0}} - ik_g \vec{e_x} \times \vec{\underline{E_0}} = -i\omega \vec{\underline{B_0}}$$

Or $\vec{\nabla} \times \vec{\underline{E_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E_{0,y}} \\ \underline{E_{0,z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E_{0,z}}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E_{0,y}}}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

DONC en projetant l'eqn de MF selon $\vec{e_x}$, on a

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\underline{E_0}} = \vec{0} \\ \vec{\underline{B_0}} = \frac{k_g}{\omega} \vec{e_x} \times \vec{\underline{E_0}} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \underset{T}{\Rightarrow} \begin{cases} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{B_0}} = \vec{0} \\ k_g \vec{e_x} \times \underline{\vec{B_0}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E_0}} \end{cases}$$

$\hat{m}$ raisonnement

- Il n'y aura alors 1 sol° ég si

$$k_g \vec{e_x} \times \left(\frac{k_g}{\omega} \vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}} \right) = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E_0}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$: la propagation du mode TEM est forcément non dispersive

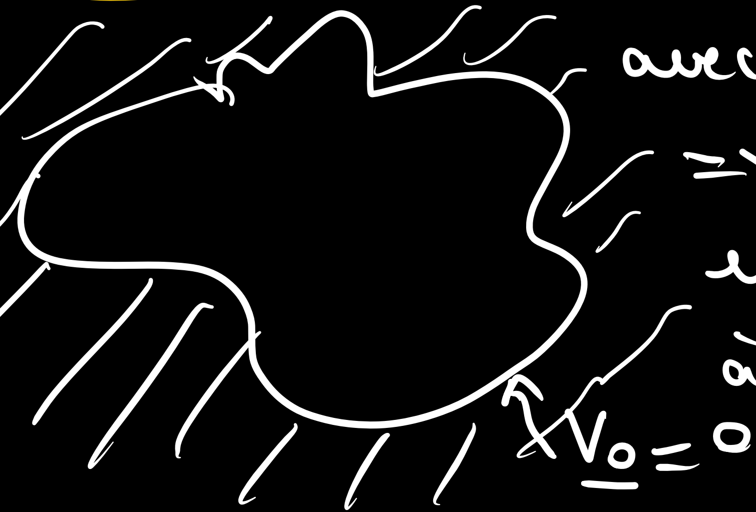
Comme $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E_0}} = \vec{0}$, $\underline{E_0}$ dérive d'1 potentiel scalaire

Lo $\underline{\vec{E_0}} = -\vec{\nabla} \underline{V_0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E_0}} = 0 \Rightarrow \Delta \underline{V_0} = 0$

DONC $\underline{V_0}$ vérifie l'eqn de Laplace.

- En présence de conducteurs parfaits, le potentiel est cst ds les conducteurs (cette cste peut ê prise = 0) et CONT à l'interface vide/conducteur.

• CSQ : Si le guide est délimité par 1 seul conducteur, $\underline{V_0}$ vérifie l'eqn de Laplace avec des CLs de Dirichlet



=> si 1 sol° existe, elle est uniq, ici il en existe une, à savoir $\underline{V_0} = 0$ partout.

=> on en déduit q $\vec{\underline{E_0}} = \vec{0}$ et $\vec{\underline{B_0}} = \vec{0}$ ds ce cas et ∅ mode TEM ne peut se propager.

* Si le guide est délimité par 2 conducteurs ≠ alors le raisonnem^t précédent ne fonctionne plus si les 2 conducteurs sont portés à des potentiels ≠

↳ ds ce cas, 1 mode TEM peut se propager ds le guide.

- <u>Ex</u> : guide d'ondes entre 2 plans (ϕ réaliste), guide d'ondes entre 2 conducteurs coaxiaux (câble coax en TP).

b) Pertes en ligne

- Ds la descripθ précédente, on a supposé q̄ les miroirs étaient parfaits, de sorte q̄ le chp em s'annulait ds les conducteurs. C'est l'éq. d'1 impédance ∞ en acoustiq̄.

- En réalité, si on tient compte du fait q̄ les miroirs sont réels, il s'établit ds les conducteurs 1 onde évanescente sur 1 épaisseur caractéristiq̄ δ qui est l'épaisseur de peau

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

σ : conductivité e^-.

- Ds ce cas, ou celui d'1 impédance $<\infty$ en acoustiq̄, cela conduit à 1 coeff. de réflexion <1 : il y a donc des pertes en ligne.

- Cela concerne égalem^t les fibres optiq̄ où l onde évanescente s'établit ds la gaine.

- La résolu° analytiq̄ du PBM devient ⊕ complexe ds ce cas (pbm analogue à celui du puits de potentiel de la part. quantiq̄).

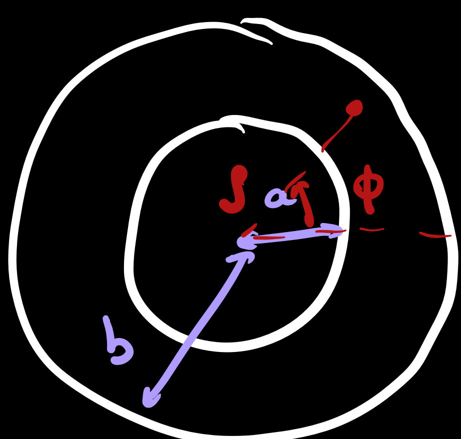
III. ETUDE DES GUIDES D'ONDE CYLINDRIQUES

1) Câble coaxial

a) Mise en eqn

- On considère 1 guide d'onde composé de 2 conducteurs cylindriq̄ ≠ : fibres optiq̄, câbles coax.

↳ l'espace entre les conducteurs n'est plus simplem^t connexe et on va pouvoir observer 1 mode TEM.



$$\left\{\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{E_0}}(\rho,\phi)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \underline{\vec{B}} &= \underline{\vec{B_0}}(\rho,\phi)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \end{aligned}\right.$$

- On part des eqns de Maxwell et on cherche des sol° TE ($E_x = 0$) ou TM ($B_x = 0$) comme ds le cas du guide d'onde rectangulaire. MAIS le calcul est + ardu car fait intervenir les f° de Bessel.
- Ici, on va se contenter de chercher le mode TEM t.q $E_x = B_x = 0$.

(MF) $$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - k_g x)} + \vec{\nabla}\left[e^{i(\omega t - k_g x)}\right] \times \underline{\vec{E_0}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E_0}} - i k_g \vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}} = -i\omega \underline{\vec{B_0}}.$$

or $$\underbrace{\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E_0}}}_{\uparrow\, E_x = 0} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{E_{0,\phi}}) - \frac{\partial \underline{E_{0\rho}}}{\partial \phi}\right)\vec{e_x}$$

DONC $$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{E_{0,\phi}}) - \frac{\partial \underline{E_{0\rho}}}{\partial \phi}\right] = 0 \quad (\cdot \vec{e_x}) \\ \vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}} = \frac{\omega}{k_g} \underline{\vec{B_0}} \end{cases}$$

ou encore $$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E_0}} = \vec{0} \\ \vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}} = \frac{\omega}{k_g} \underline{\vec{B_0}}. \end{cases}$$

(MA) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B_0} - ik_g\,\vec{e_x}\times\vec{B_0} = +\frac{i\omega}{c^2}\vec{E_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{B_0} = \vec{0} \\ \vec{e_x}\times\vec{B_0} = -\dfrac{\omega}{k_g c^2}\vec{E_0} \end{cases}$$

(MG) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E_0}\, e^{i(\omega t - k_g x)} + \vec{\nabla}\left[e^{i(\omega t - k_g x)}\right]\cdot\underset{=0}{\vec{E_0}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E_0} - ik_g\,\vec{e_x}\cdot\vec{E_0} = 0$$

DONC $\vec{\nabla}\cdot\vec{E_0} = 0$

(MT) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B_0} = 0$

- On peut donc réduire les eqns de Maxwell sous la forme

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E_0} = 0 & \vec{\nabla}\cdot\vec{B_0} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E_0} = \vec{0} & \vec{\nabla}\times\vec{B_0} = \vec{0} \end{cases}}$$

(+)
$$\boxed{\begin{cases} \vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}} = \dfrac{\omega}{k_g} \underline{\vec{B_0}} \\ \vec{e_x} \times \underline{\vec{B_0}} = -\dfrac{\omega}{k_g c^2} \underline{\vec{E_0}} \end{cases}}$$

b) Calcul du mode TEM

- On peut tirer plusieurs pptés des eqns précédentes :

1) L'onde eq a 1 structure d'onde plane
$(\vec{k}, \underline{\vec{E_0}}, \underline{\vec{B_0}})$ forme 1 trièdre direct
où $\vec{k} = k_g \vec{e_x}$

2) On peut obtenir la RD :
$$\vec{e_x} \times (\vec{e_x} \times \underline{\vec{E_0}}) = (\vec{e_x} \cdot \underline{\vec{E_0}})\vec{e_x} - \underline{\vec{E_0}} = -\underline{\vec{E_0}}$$
$$\Rightarrow -\underline{\vec{E_0}} = \frac{\omega}{k_g} \vec{e_x} \times \underline{\vec{B_0}} = -\frac{\omega^2}{k_g^2 c^2} \underline{\vec{E_0}}$$
Ainsi, pour obtenir 1 sol° non triviale-m^t nulle, on a q̄ :
$$\omega^2 = k_g^2 c^2 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \pm k_g c}$$
$\Rightarrow$ il s'agit de la RD des ondes planes ds le vide : l'onde ne voit pas les CLs

→ contrairement aux autres modes, il n'y a pas de fréq. de coupure (TEM_0)

3) $\underline{\vec{E_0}}$ et $\underline{\vec{B_0}}$ vérifient l'eqn de laplace car :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\underline{\vec{E_0}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{E_0}}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{E_0}}) = \vec{0} \\ \Delta\underline{\vec{B_0}} = \vec{0} \end{cases}}$$

4) Tout le pbm se résume au calcul d'1 "potentiel électriq" $\underline{V_0}$ t.q

$$\boxed{\underline{\vec{E_0}} = -\vec{\nabla}\underline{V_0}} \text{ car } \vec{\nabla}\times\underline{\vec{E_0}} = \vec{0}$$

et qui vérifie l'eqn de laplace

$$\boxed{\Delta\underline{V_0} = 0}$$

- Pour chercher le potentiel V_0, on procède par séparation des variables, i.e. on pose $\underline{V_0}(\rho, \phi) = f(\rho)\,g(\phi)$

$$\Delta\underline{V_0} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial \underline{V_0}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \underline{V_0}}{\partial\phi^2}$$

$$= g(\phi)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho f'(\rho)\right) + \frac{1}{\rho^2}f(\rho)g''(\phi)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{f(\rho)} \frac{d}{d\rho}(\rho f'(\rho)) = -\frac{g''(\phi)}{g(\phi)} = \text{cste} = k^2$$

$\hookrightarrow$ $$\begin{cases} g''(\phi) + k^2 g(\phi) = 0 \\ \rho \frac{d}{d\rho}(\rho f'(\rho)) - k^2 f(\rho) = 0 \end{cases}$$

- On commence par g sur ϕ :

$$g(\phi) = Ae^{ik\phi} + Be^{-ik\phi} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}.$$

Or pour q̄ $\underline{V_e}$ soit régulier, il faut q̄

$$\underline{V_e}(\phi + 2\pi) = \underline{V_e}$$

$$\Rightarrow e^{i2\pi k} = 1$$

$$\Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow g(\phi) = A\cos(k\phi) + B\sin(k\phi) = C\cos(k\phi + \phi_0)$$

où C, ϕ_0 sont des ctes.

- Pour ρ, on a :

$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) - k^2 f(\rho) = 0$$

On cherche $f(\rho) \propto \rho^\alpha$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$$

$$\alpha^2 = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \pm k$$

<u>Donc</u> $f(\rho) = \dfrac{E}{\rho^k} + F\rho^k$ si $k \neq 0$

Si $k=0$ alors on doit résoudre

$$f''(\rho) + \frac{f'(\rho)}{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(\rho) = \frac{E}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad f(\rho) = E \ln \rho + F$$

- <u>CCL</u>: On a :

$$V_0(\rho, \phi) = \begin{cases} A \ln \rho + B & \text{si } k=0 \\ \left[\dfrac{A}{\rho^k} + B\rho^k\right] \cos(k\phi + \phi_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

- On utilise maintenant les CLs, à savoir que la composante tangentielle de $\vec{E}$ doit s'annuler sur les 2 conducteurs, soit $E_{0,\phi}(a, \phi) = E_{0,\phi}(b, \phi) = 0$

On $E_{0,\phi} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_0}{\partial \phi} & \text{sinon} \end{cases}$

Si $k \neq 0$, on doit avoir $\frac{\partial V_0}{\partial \phi}(a,\phi)$ pour $\forall \phi$

$$= \frac{\partial V_0}{\partial \phi}(b,\phi) = 0$$

$\Rightarrow$ cela impose $A = B = 0$.

- Ainsi, on en conclut que la seule sol° admissible est celle pour $k=0$, correspondant à

$$V_0(\rho,\phi) = V_0(\rho) = A \ln \rho + B,$$

qui est donc isotrope.

- On peut alors en déduire les chps :

$$\begin{cases} \vec{E} = -V_0'(\rho)\, e^{i(\omega t - k_g x)}\, \vec{e_\rho}, \\ \vec{B} = -\frac{V_0'(\rho)}{c}\, e^{i(\omega t - k_g x)}\, \vec{e_\phi}. \end{cases}$$

- Si on note V_1 et V_2 les valeurs de V_0 en $\rho = a$ et $\rho = b$ respectivem^t alors :

$$\begin{cases} A \ln a + B = V_1 \\ A \ln b + B = V_2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{V_2 - V_1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{V_1 - V_2}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e_\rho} \\ \vec{B} = \dfrac{V_1 - V_2}{\rho c \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e_\phi} \end{cases}}$$

- On peut égalem^t en déduire les potentiels scalaire & vecteur

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{cases}$$

On peut vérifier q

$$\boxed{\begin{cases} V = \left[V_1 + (V_2 - V_1) \dfrac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}\right] e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \vec{A} = \dfrac{1}{c}\left[V_1 + (V_2 - V_1) \dfrac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}\right] e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e_x} \end{cases}}$$

est l sol° du PBM.

c) Onde électrocinétiq

- On peut alors étudier la propagat° du courant & de la tension ds le coax :
- la tension $u(x,t)$ est obtenue à partir de la diff. de potentiel : $u(x,t) = V(a,x,t) - V(b,x,t)$

$$\boxed{u(x,t) = (V_1 - V_2)\, e^{i(\omega t - k_g x)}}$$

- le courant est obtenu à partir de la densité surfaciq de courant, qu'on calcule à partir de la relat° de passage pour $\vec{B}$:

$$\vec{B}(\rho = a^+) - \vec{B}(\rho = a^-) = \mu_0 \vec{j_s} \times \vec{e_\rho}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{ac \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e_\varphi} = \mu_0 \vec{j_s} \times \vec{e_\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{j_s} = \frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e_x}$$

<u>**DONC**</u> on calcule i en intégrant sur le contour :

$$i(x,t) = \vec{j_s} \cdot \vec{e_x} \times 2\pi a$$

$$\boxed{i(x,t) = \frac{2\pi (V_1 - V_2)}{\mu_0 c \ln\left(\frac{b}{a}\right)} e^{i(\omega t - k_g x)}}$$

- On peut alors mq on retrouve la modélisat° électrocinétiq du câble & calculer les inductance & capacité linéiq.

- On calcule l'énergie élec. transportée :

$$\mathcal{E}_e = \iint_{section} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 dS$$

$$= \pi\varepsilon_0 \int_a^b d\rho\, \rho \frac{(V_1-V_2)^2}{\rho^2[\ln(b/a)]^2} \cos^2(\omega t - k_g x)$$

⚠ il faut repasser en réel !

$$= \pi\varepsilon_0 \frac{(V_1-V_2)^2}{\ln(b/a)} \cos^2(\omega t - k_g x)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\, u(x,t)^2$$

où $\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}}$

- De la même manière, on calcule l'énergie mag. transportée :

$$\mathcal{E}_m = \iint_{section} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} dS$$

$$= \pi \int_a^b d\rho\, \rho \frac{(V_1-V_2)^2}{\mu_0 c^2 [\ln(b/a)]^2 \rho^2} \cos^2(\omega t - k_g x)$$

$$= \frac{\pi}{\mu_0 c^2 \ln(b/a)} (V_1-V_2)^2 \cos^2(\omega t - k_g x)$$

$$= \frac{1}{2}\Lambda\, i(x,t)^2$$

où $$\frac{1}{2}\Lambda\frac{(2\pi)^2(V_1-V_2)^2}{\mu_0^2c^2\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2} = \frac{\pi(V_1-V_2)^2}{\mu_0 c^2 \ln(b/a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- En part., on peut vérifier q̄ :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c \\ \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{u(x,t)}{i(x,t)} = Z \end{cases}$$

- De ⊕, on constate q̄ Λ, Γ ne dépendent q̄ de la géométrie du coax.

- RQ: Cette étude est très importante en pratiq. car les fréq. de coupure des modes TE & TM sont :

$$\begin{cases} f_{c,TE} \simeq \dfrac{c}{2(b-a)} \\ f_{c,TM} \simeq \dfrac{c}{\pi(a+b)} \end{cases}$$

OdG : $a = 0.54\,mm$
$b = 1.48\,mm$

$f_{c,TE} = 160\,GHz$, $f_{c,TM} \simeq 102\,GHz$.

↳ en TP ou à la TV, seul le mode TEM peut se propager ds le coax (car la fréq.

typiq des ondes est au ⊕ du MHz).

d) Calcul des modes TE / TM

- On cherche des sol° sous la forme

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}(\rho,\phi,x,t) = \underline{\vec{E_0}}(\rho,\phi)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \\ \underline{\vec{B}}(\rho,\phi,x,t) = \underline{\vec{B_0}}(\rho,\phi)\, e^{i(\omega t - k_g x)} \end{cases}$$

- Les CLs vérifiées par le chp sont

$$\begin{cases} \underline{E_{0,\phi}}(a,\phi) = \underline{E_{0,\phi}}(b,\phi) = 0 \\ \underline{E_{0,x}}(a,\phi) = \underline{E_{0,x}}(b,\phi) = 0 \\ \underline{B_{0,\rho}}(a,\phi) = \underline{B_{0,\rho}}(b,\phi) = 0 \end{cases}$$

- Entre les 2 conducteurs, on a du vide et le chp em vérifie l'eqn de D'Alembert :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ soit en projec° selon } \vec{e_x}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \underline{E_{0,x}}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_{0,x}}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial \rho} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right)\underline{E_{0,x}} = 0$$

On procède par séparao des variables

$$\underline{E_{0,x}}(\rho,\phi) = f(\rho)\, g(\phi)$$

$$\hookrightarrow \frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{f'(\rho)}{\rho f'(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{g''(\phi)}{g(\phi)} + \frac{\omega^2}{c^2} - kg^2 = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2\left[\frac{f''(\rho)}{f(\rho)} + \frac{f'(\rho)}{\rho f'(\rho)} + \frac{\omega^2}{c^2} - kg^2\right] + \frac{g''(\phi)}{g(\phi)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g''(\phi) = -\gamma^2 g(\phi) \\ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - kg^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2}\right] f(\rho) = 0 \end{cases}$$

où $\gamma^2 \in \mathbb{R}$

Comme $g(\phi)$ est 1 f° 2π-périodiq̄ (pour q̄ $\underline{E_{0,x}}$ soit bien déf.), on en déduit q̄ $\gamma_n = n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $g(\phi) = g_0 \cos(n\phi + \phi_0)$ où g_0, ϕ_0 : cstes d'$\int$.

On en déduit alors q̄ OS ≠ 0 sinon TEM

$$\rho^2 f''(\rho) + \rho f'(\rho) + \left[\rho^2\left(\frac{\omega^2}{c^2} - kg^2\right) - n^2\right] f(\rho) = 0$$

dont les sol° sont les f° de Bessel de 1ère espèce J_n et de 2nde espèce Y_n :

$$f_n(\rho) = A_n J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,\rho\right) + B_n Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,\rho\right)$$

- les CLs donnent alors

$$f_n(a) = f_n(b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) + B_n Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) = 0 \\ A_n J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) + B_n Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) = 0 \end{cases}$$

Pour $\bar{q}$ ces eqns admettent des sol° non triviales, il faut $\bar{q}$ $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$ (ppté des f° de Bessel).
Ds ce cas, il y aura 1 sol° $\neq 0$ ssi le dét. du syst. s'annule, soit

$$J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) = J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right)$$

↳ cette eqn admet 1 ens. discret de sol°

$\alpha_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}$ qui dépendent de a et b.

f^o_n sol^o_m

$\Rightarrow$ R.D. $\boxed{k_{g,mn}^{(TM)2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,mn}^{(TM)2}}{c^2} \quad \text{où } \omega_{c,mn}^{(TM)} = c\alpha_{mn}}$

- On peut procéder pareillem^t pour $\underline{B_{0,x}}(\rho,\phi) = f(\rho)g(\phi)$, qui vérifient la m̂ eqn. Pour déterminer les CLs, on utilise l'eqn de MA $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial \phi} + ik_g \underline{B_{0,\phi}} = \frac{i\omega}{c^2}\underline{E_{0,\rho}} \\ -ik_g \underline{B_{0,\rho}} - \frac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial \rho} = \frac{i\omega}{c^2}\underline{E_{0,\phi}} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \underline{B_{0,\phi}}\right) - \frac{\partial \underline{B_{0,\rho}}}{\partial \phi} = \frac{i\omega}{c^2}\underline{E_{0,x}}. \end{cases}$$

De la 2nde eqn, on en tire $\bar{q}$ $\frac{\partial \underline{B_{0,x}}}{\partial \rho}(a,\phi) = 0$

et $\frac{\partial B_{0z}}{\partial \rho}(b,\phi) = 0$.

$$\Rightarrow \quad f_n(\rho) = A'_n J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,\rho\right) + B'_n Y_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,\rho\right)$$

avec les CLs

$$\begin{cases} A'_n J'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) + B'_n Y'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) = 0 \\ A'_n J'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) + B'_n Y'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) = 0 \end{cases}$$

Là encore, cela impose q $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$ et pour avoir 1 sol° non trivialem^t nulle il faut q le det. soit $= 0$

$$J'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right) Y'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) = J'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,b\right) Y'_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}\,a\right)$$

↳ cette eqn admet encore 1 nbre discret de sol° $\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}$ qui dépendent de a et b.

$\Rightarrow$ R.D. $\boxed{k_{g,mn}^{(TE)\,2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,mn}^{(TE)\,2}}{c^2} \quad \text{où } \omega_{c,mn}^{(TE)} = c\beta_{mn}}$

⚠ $\alpha_{mn} \neq \beta_{mn}$

- On peut alors en déduire les autres chps en f° de $\underline{E_{0,x}}$ et $\underline{B_{0x}}$ à partir des eqns de Maxwell :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \underline{E_{0,\rho}}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{E_{0,\phi}}}{\partial\phi} - ik_g \underline{E_{0,x}} = 0 \quad (1) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \underline{B_{0,\rho}}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{B_{0,\phi}}}{\partial\phi} - ik_g \underline{B_{0,x}} = 0 \quad (2) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial\phi} + ik_g \underline{E_{0,\phi}} = -i\omega \underline{B_{0,\rho}} \quad (3) \\ -ik_g \underline{E_{0,\rho}} - \frac{\partial \underline{E_{0,x}}}{\partial\rho} = -i\omega \underline{B_{0,\phi}} \quad (4) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \underline{E_{0,\phi}}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{E_{0,\rho}}}{\partial\phi} = -i\omega \underline{B_{0,x}} \quad (5) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_{0,x}}{\partial \phi} + ik_g B_{0,\phi} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0,\rho} & (6) \\ -ik_g B_{0,\rho} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial \rho} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0,\phi} & (7) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho B_{0,\phi}\right) - \frac{\partial B_{0,\rho}}{\partial \phi} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0,x}. & (8) \end{array}\right.$$

(3) et (7) =>

$$-ik_g B_{0,\rho} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial \rho} = \frac{i\omega}{c^2}\left[-\frac{i\omega}{ik_g} B_{0,\rho} - \frac{1}{ik_g\rho}\frac{\partial E_{0,x}}{\partial \phi}\right]$$

$$i\left(\frac{\omega^2}{c^2 k_g} - k_g\right) B_{0,\rho} = \frac{\partial B_{0,x}}{\partial \rho} - \frac{\omega}{c^2 k_g \rho}\frac{\partial E_{0,x}}{\partial \phi}$$

$$i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) B_{0,\rho} = k_g\frac{\partial B_{0,x}}{\partial \rho} - \frac{\omega}{c^2 \rho}\frac{\partial E_{0,x}}{\partial \phi} \quad (9)$$

↳ là encore, on en déduit q̄ $B_{0,\rho}$ (et toutes les autres composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$) s'écrivent comme comb. lin. de $E_{0,x}$ et $B_{0,x}$ et leurs dérivées.

=> on pourra donc dif. 2 familles de sol° TE ($E_{0,x} = 0$) et TM ($B_{0,x} = 0$) et tte onde se propageant ds le guide s'écrira comme superposit° de ces 2 familles.

- Sol° en mode TE : $E_{0,x} = 0$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_{0,\rho}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{0,\phi}}{\partial \phi} = 0 \quad (1')$$

$$k_g E_{0,\phi} = -\omega B_{0,\rho} \quad (3')$$

$$k_g E_{0,\rho} = \omega B_{0,\phi} \quad (4')$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_{0,\phi}) = \frac{\partial B_{0,\rho}}{\partial \phi} \quad (8')$$

$$i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) B_{0,\rho} = k_g \frac{\partial B_{0,x}}{\partial \rho} \quad (9')$$

la on en déduit alors les sol° en mode TE ainsi q̄ leur R.D.

$$\boxed{k_{g,nm}^{(TE)\,2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,nm}^{(TE)\,2}}{c^2} \qquad \text{où } \omega_{c,nm}^{(TE)} = c\beta_{nm}}$$

où β_{nm} est la m-ième sol° de

$$J_n'(\beta_{nm}a)\,Y_n'(\beta_{nm}b) = J_n'(\beta_{nm}b)\,Y_n'(\beta_{nm}a)$$

• Sol° en mode TM : $B_{0,x} = 0$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho B_{0,\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_{0,\phi}}{\partial\phi} = 0 \quad (2')$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_{0,\phi}\right) = \frac{\partial E_{0,\rho}}{\partial\phi} \quad (5')$$

$$k_g B_{0,\phi} = \frac{\omega}{c^2} E_{0,\rho} \quad (6')$$

$$k_g B_{0,\rho} = -\frac{\omega}{c^2} E_{0,\phi} \quad (7')$$

$$i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) B_{0,\rho} = -\frac{\omega}{c^2\rho}\frac{\partial E_{0,x}}{\partial\phi} \quad (9')$$

↳ on en déduit alors les sol° en mode TM ainsi q̄ leur R.D.

$$\boxed{k_{g,nm}^{(TM)\,2} = \frac{\omega^2 - \omega_{c,nm}^{(TM)\,2}}{c^2} \quad \text{où } \omega_{c,nm}^{(TM)} = c\,\alpha_{nm}}$$

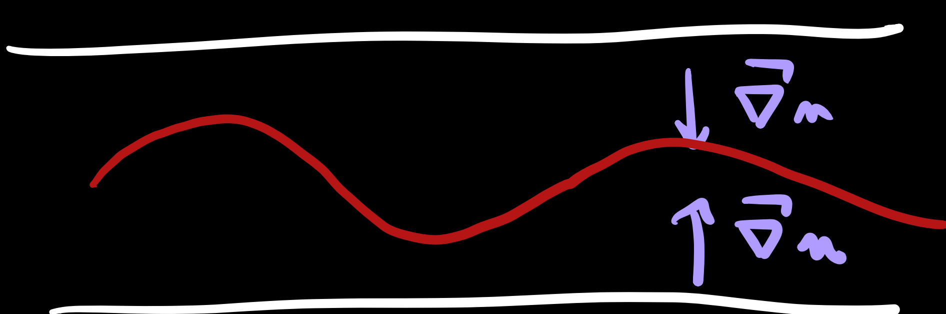
où α_{nm} est la m-ième sol° de

$$J_n(\alpha_{nm}a)\,Y_n(\alpha_{nm}b) = J_n(\alpha_{nm}b)\,Y_n(\alpha_{nm}a)$$

• RQ: Contrairem^t au guide d'onde rectangulaire, la RD des modes TE et TM est ≠, tout comme les fréq. de coupure.

2) Fibre optiq̄ à $\vec{\nabla}$ d'indice

• On revient sur le cas des fibres optiq̄ mais cette fois-ci OS q̄ l'indice optiq̄ varie CONT.

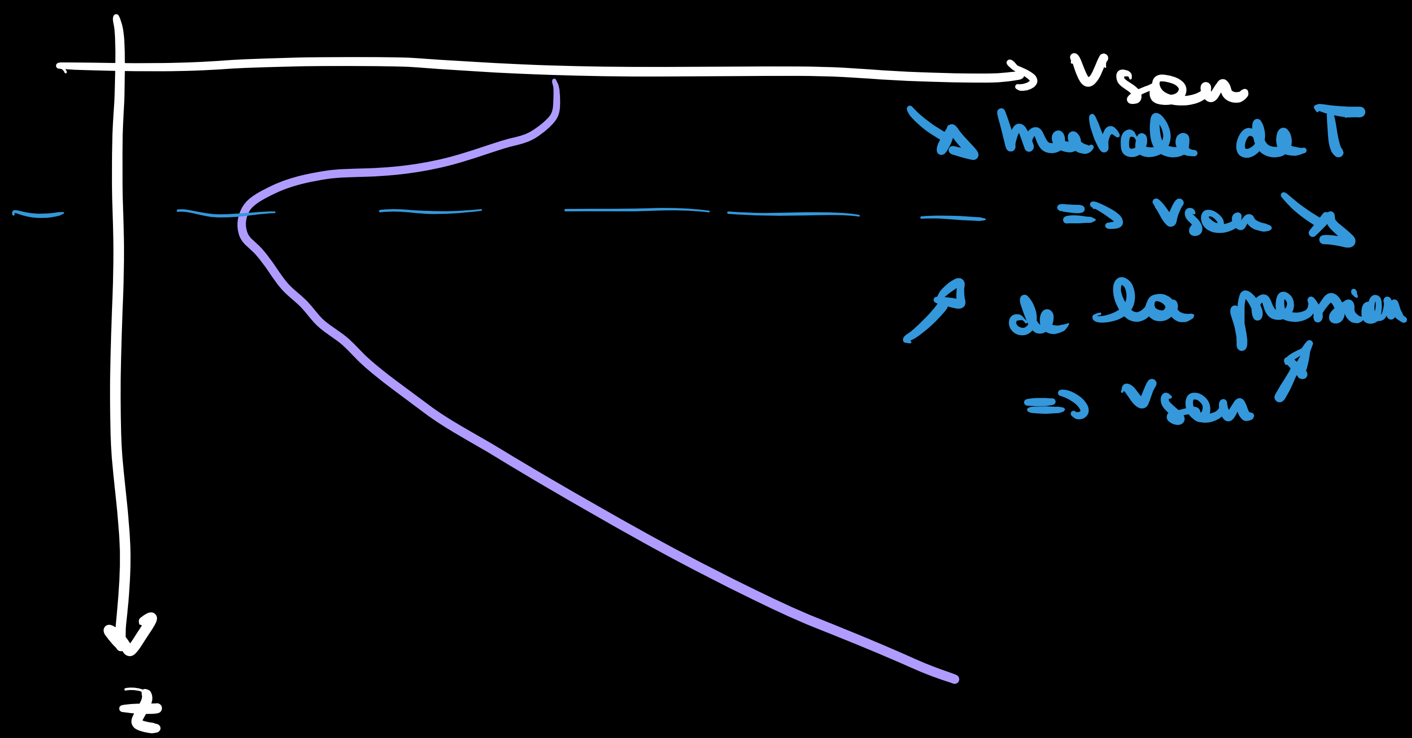


- <u>Intérêt</u>: on $\searrow$ la dispersion intermodale car les rayons d'angle élevé (modes grands) voient l'indice ⊕ faible et se propagent ⊕ vite.

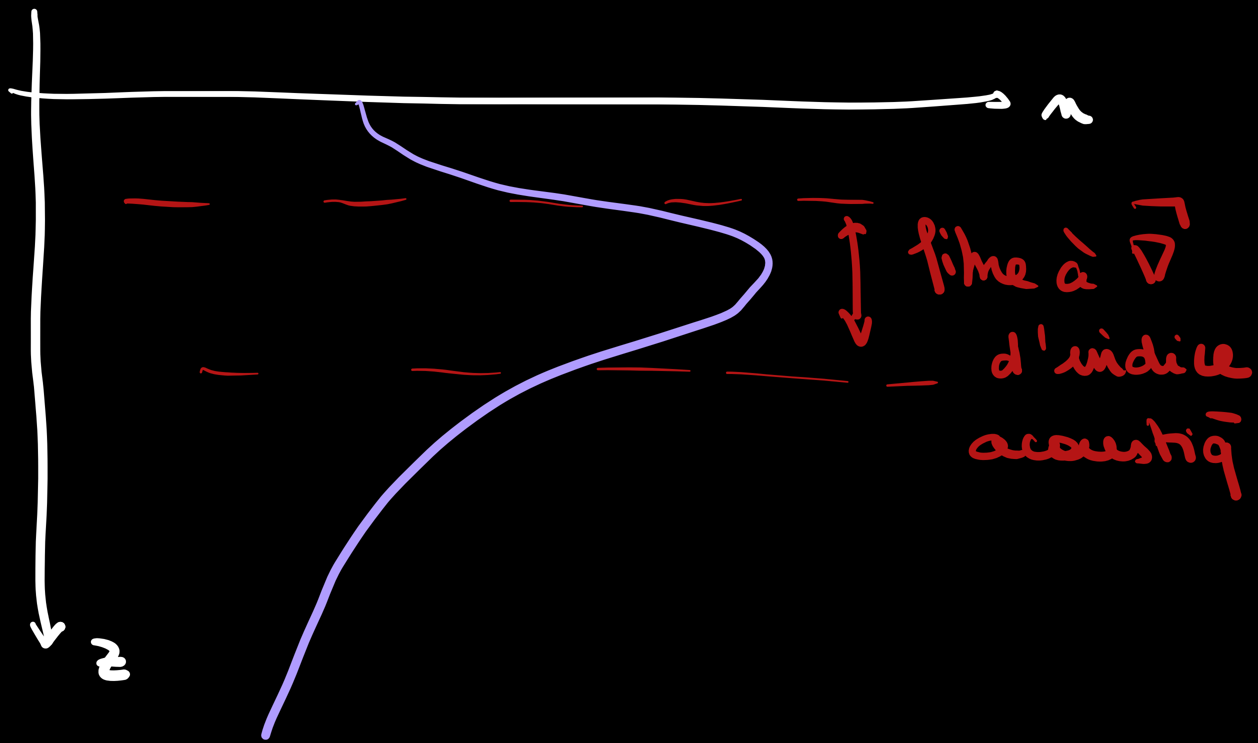
  ↳ cela permet d'$\nearrow$ le débit d'info.

- <u>Applicat°</u>: il existe des fibres à $\vec{\nabla}$ d'indice naturelles.

  <u>ex</u>: SOFAR channels ds les océans à cause de la combinaison des variat° de T et P : v $\nearrow$ avec T et P.



<=>



↳ C'est par exemple le lieu privilégié pour enregistrer les séismes

- Eqn des rayons lumineux :

$$\boxed{\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \vec{\nabla} n}$$ où $\vec{u}$: vecteur unitaire