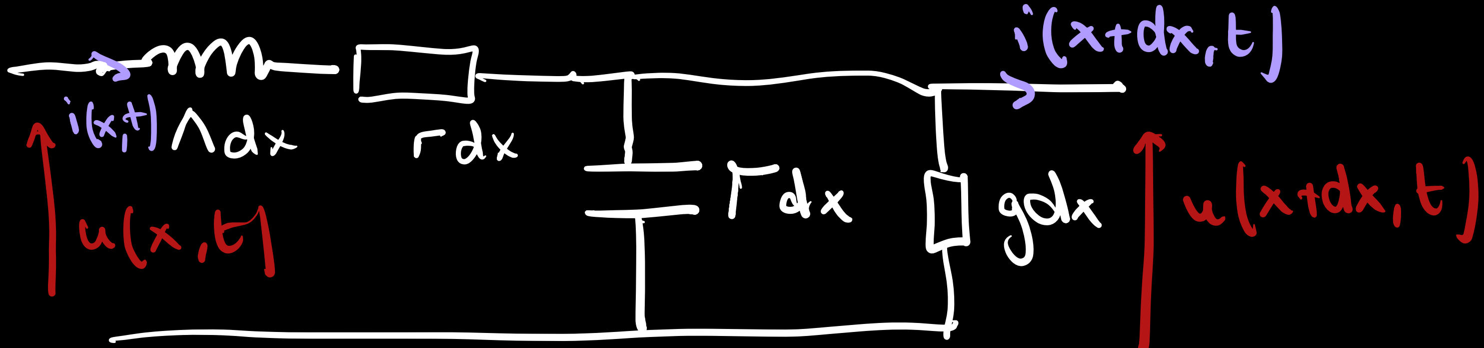
Chapitre II : PROPAGATION AVEC DISPERSION

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la propaga° ds des milieux simples, en part. nous avons vu $\bar{q}$ les ondes se propageaient $\varnothing$ se déformer, cq au fait $\bar{q}$ $v_\varphi = \text{cste}$. Ds ce chapitre, on s'intéresse au cas où $v_\varphi(\omega)$: on parle de <u>propaga° dispersive</u>.

I. DISPERSION PAR UN MILIEU INFINI LINÉAIRE

1) Câble coaxial réel

- On reprend le câble coaxial avec ctes réparties, mais on en propose 1 descrip° ⊕ réaliste.
  - ↳ on tient compte de la dissipa° par effet Joule ds les conducteurs : résistance de ligne r par unité de longueur.
  - ↳ on tient compte du courant de fuite entre les 2 conducteurs : conductance g par unité de longueur.



Alors $u(x+dx,t) + r\,dx\, i(x,t) + \Lambda\, dx \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$

$= u(x,t)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -r i - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}}$$

négligeable à HF

et $i(x,t) - \Gamma\, dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t) - g u(x+dx,t)$

$= i(x+dx,t)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u}$$

↳ on observe que les relations de couplage ont changé : on va trouver l'eqn d'onde ≠ car le milieu a changé.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - g \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \Gamma r \frac{\partial i}{\partial t} + \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + g r i + g \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial i}{\partial t} + g r i}$$

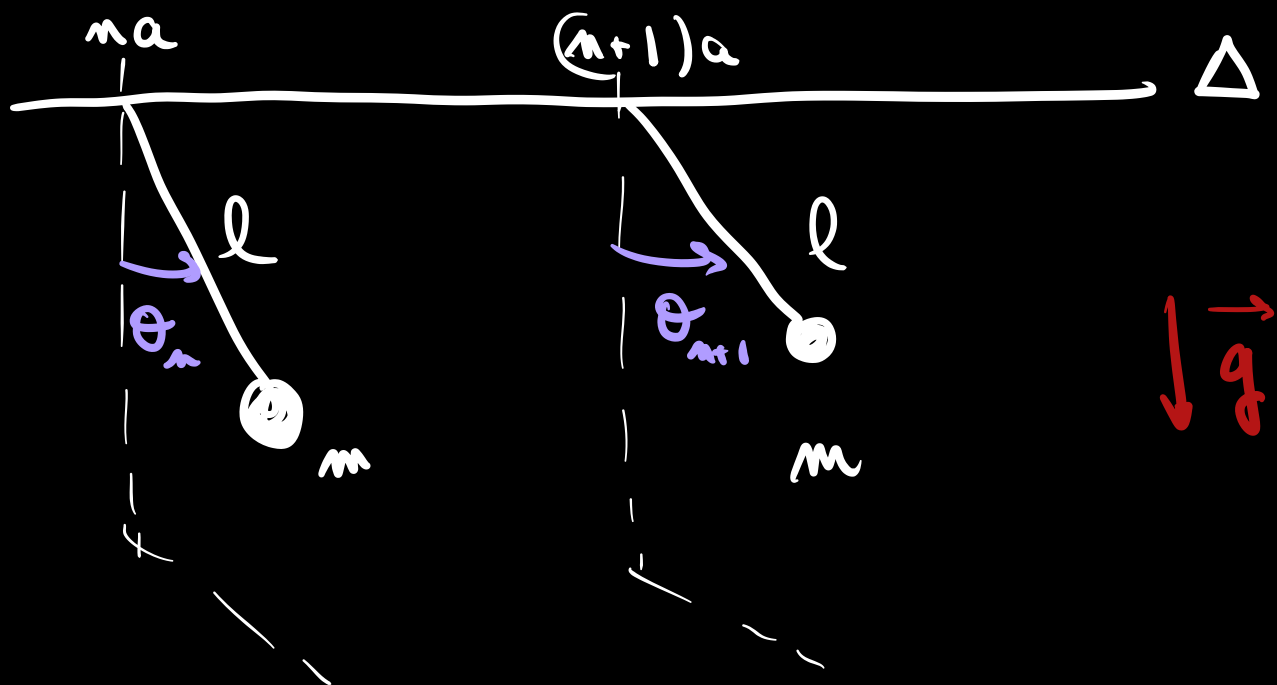
C'est l'eqn des télégraphistes.

Ptés : 1) N'est plus invariante par $t \to -t$: propagation irréversible à cause de la dissipation & des fuites (r et g).

2) Par contre, toujours invariante par translation du $x \to -x$: milieu homogène & isotrope.

3) Ne peut plus être résolue par chgt de variable $\xi = x - ct$ et $\eta = x + ct$: il n'existe plus 1 seule vitesse de propagation de l'onde.

2) Chaîne de pendules couplés par torsion



- On considère 1 ens. de $N \gg 1$ pendules de même masse m & longueur l.

- Hyp : 1) on néglige toute source de dissipation

2) fil de torsion de cste C.

3) Petits angles $|\theta_n| \ll 1$

- On appliq le TMC à 1 pendule ds le ref. du labo supposé galiléen :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta^+ + \mathcal{M}_\Delta^-$$

où L_Δ : mom^t cinétiq par rapport à l'axe Δ

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$: mom^t du poids ————

$\mathcal{M}_\Delta^\pm$: mom^t de torsion ————
exercées par les parties gauche & droite.

Or $L_\Delta = ml^2\dot{\theta}_n$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgl\sin\theta_n \simeq -mgl\theta_n$

$\mathcal{M}_\Delta^+ = C(\theta_{n+1} - \theta_n)$

$\mathcal{M}_\Delta^- = C(\theta_{n-1} - \theta_n)$

$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta}_n = -mg\ell\theta_n + C(\theta_{n+1}+\theta_{n-1}-2\theta_n)$

$$\ddot{\theta}_n + \frac{g}{\ell}\theta_n - \frac{C}{m\ell^2}(\theta_{n+1}+\theta_{n-1}-2\theta_n) = 0$$

- On va maintenant faire l'approx. des milieux CONT, ce qui revient à supposer q $a \ll \lambda$. On introduit donc 1 chp CONT $\theta(x,t)$ t.q $\theta(na,t) = \theta_n(t)$.

On obtient alors :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(na,t) + \frac{g}{\ell}\theta(na,t) - \frac{C}{m\ell^2}\{\theta(na+a,t) + \theta(na-a,t) - 2\theta(na,t)\} = 0$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(na,t) + \frac{g}{\ell}\theta(na,t) - \frac{Ca^2}{m\ell^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(na,t) = 0$$

Comme $\lambda \gg a$, on peut donc écrire :

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \omega_0^2\theta - c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{où } c = \sqrt{\frac{Ca^2}{m\ell^2}} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

C'est l'eqn de Klein–Gordon.

RQ : On la retrouve ds ≠ domaines de la φ, p.e. les ondes ep ds 1 plasma dilué, l'eqn de propagat° des ondes de matière de particules relativistes de spin nul.

Pptés : 1) On retrouve l'EOC si $\omega_0 = 0$, i.e. si $g \to 0$.

2) Elle décrit tjs 1 propagat° rév. ds 1 milieu homogène & isotrope.

3) Là encore, on ne peut plus la résoudre si on pose $\xi = x - ct$ et $\eta = x + ct$.

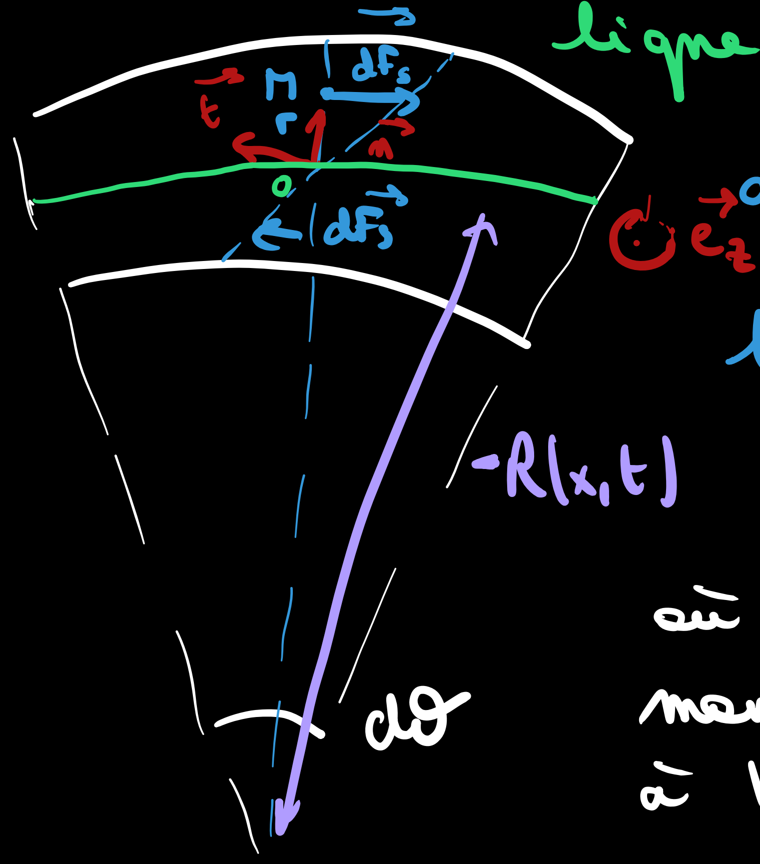
3) Corde de Melde avec raideur $< \infty$

• On revient sur le cas de la corde de Melde, mais on tient compte cette fois-ci de la raideur K de la corde, c'est-à-dire le fait qu'il y a 1 coût énergétiq lorsq le rayon de courbure R de la corde est trop petit (corde non courbée : $R \to +\infty$)

↳ cela revient à considérer 1 mom^t de flexion :

$$\vec{M}(x,t) = \iint_{\text{secO}} \vec{OM} \times d\vec{F_s} = \int_{\text{secO}} dr \, \frac{E}{R} r^3 \, \vec{e_z}$$

$$= \frac{EI}{R}\vec{e_z}$$



$$\vec{dF_s} = dS\,E\,\vec{t}\,\varepsilon = E\vec{t}\,\frac{r}{R}\,2\pi r\,dr$$

loi de Hooke

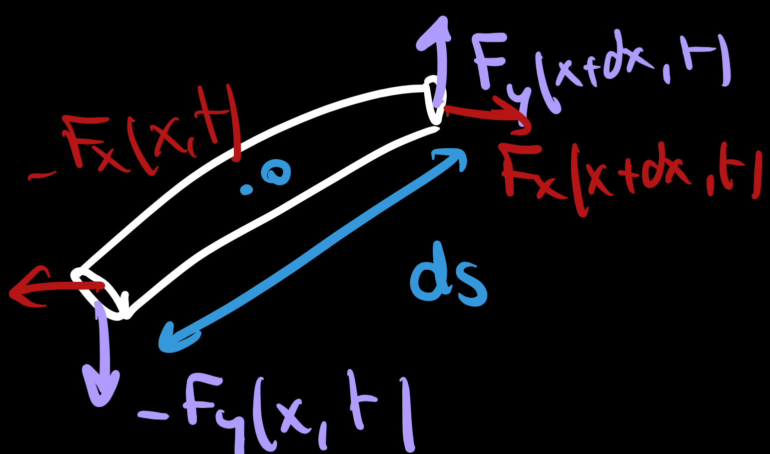
$$\left[I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4 \right]$$

d : diamètre de la corde

où I est 1 cste géo. appelée mom^t quadratiq, et homogène à 1 distance à la puissance 4.

<u>DONC</u> $\vec{M}(x,t) = EI\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\,\vec{e_z}$

- On va appliquer le PFD à 1 élém^t de corde de longueur $ds \simeq dx$.



- On note $M = \vec{M}\cdot\vec{e_z}$ et $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ la vitesse verticale.

le PFD donne alors :

$$\begin{cases} \mu\, dx \dfrac{\partial v}{\partial t} = F_{d,y}(x+dx,t) + F_{g,y}(x,t) \\ 0 = F_{d,x}(x+dx,t) + F_{g,x}(x,t) \end{cases}$$

Or d'après la 3$^{\text{ème}}$ loi de Newton, on a :

$\vec{F} = \vec{F_d} = -\vec{F_g}$, soit :

F : force verticale

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow F_x = cste = T \end{cases}$$

• Pour obtenir l'eqn supplémentaire, on appliq le TMC selon l'axe (Oz) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= M(x+dx,t) - M(x,t) \\ &\quad + F_y(x+dx,t)\frac{dx}{2} + F_y(x,t)\frac{dx}{2} \\ &\quad - F_x(x+dx,t)\,dy - F_x(x,t)\,dy \\ &= \left[\frac{\partial M}{\partial x} + F - T\frac{\partial y}{\partial x}\right]dx \end{aligned}$$

Or $L = J\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ et $J = \mu\dfrac{dx}{4}(dx)^2 = \mu\dfrac{(dx)^3}{4} \rightarrow$ négligeable

DONC $\dfrac{\partial M}{\partial x} + F - T\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0.$

On a donc

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial F}{\partial x} & \text{(PFD)} \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial x} + F - T\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 & \text{(TMC)} \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial t} = EI \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \text{(déf. de M)} \end{cases}$$

↳ on a 3 eqns couplées et 3 variables couplées (v, F, M) et on peut combiner les 3 eqns précédentes pour obtenir l'edp vérifiée par $y(x,t)$:

$$\text{(TMC)} \Rightarrow F = T\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\text{(PFD)} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}}$$

• Ptés : 1) On retrouve l'EOC si $E \to 0$, i.e. si la corde n'est pas déformable
2) Si $T_0 \to 0$ alors on trouve l'eqn des poutres.
3) Cette eqn traduit tjs la propagat° rév. ds 1 milieu LHI.
4) Par une uniq vitesse.

4) Déf. de la dispersion

a) RD

• Une fois qu'on a obtenu l eqn d'onde linéaire, on en cherche 1 sol° sous la forme d'1 OPPS : onde plane pseudo-progressive sinusoïdale

$$\boxed{\underline{A}(x,t) = \underline{A_0}\, e^{i(\omega t - \underline{k}x)} + c.c. \quad \text{où } \omega \in \mathbb{R}_+,\ \underline{k} \in \mathbb{C} \qquad \text{avec } \underline{k} = k' - ik''}$$

choix

partie imag.

partie réelle

• Interprétat° : $A(x,t) = A_0\, e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi)$

k'' : décrit l'atténuat° / amplificat° de l'onde.

⚠ ≠ amortissem^t

$\lambda = \frac{2\pi}{k'}$ (k' décrit la propagat° de l'onde.

- On appelle alors relat° de dispersion (RD) la relat° qui lie $\underline{k}$ à ω pour les OPPS sol° de l'eqn d'onde.

b) Vitesse de φ

- On définit alors la vitesse de φ comme la vitesse de propagat° de la φ, i.e.

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}}$$ RD

- Rq: À 3D, on a $\vec{v_\varphi} = \frac{\omega}{|\vec{k}'|} \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}$.

- On dit alors qu'1 milieu est dispersif si v_φ dépend explicitem^t de ω.

- Rq: On parle de dispersion par analogie avec l'optiq.

5) Critères de dispersion

- La dispersion par 1 milieu ∅ linéaire peut ê causée par ≠ phénomènes.

a) Fréq. caractéristiq

- L'existence d'1 fréq. caractéristiq du milieu traduit l'existence de processus internes d'interac° de l'onde avec le milieu.

- C'est le cas de l'eqn de K-G.

- RD : $-\omega^2+\omega_0^2+\underline{k}^2c^2=0 \Rightarrow \boxed{\underline{k}^2=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{c^2}}$

* Si $\omega>\omega_0$ alors $\underline{k}=\pm\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}{c}=k'$ (réel)

et $\boxed{v_\varphi=\frac{\omega}{k'}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

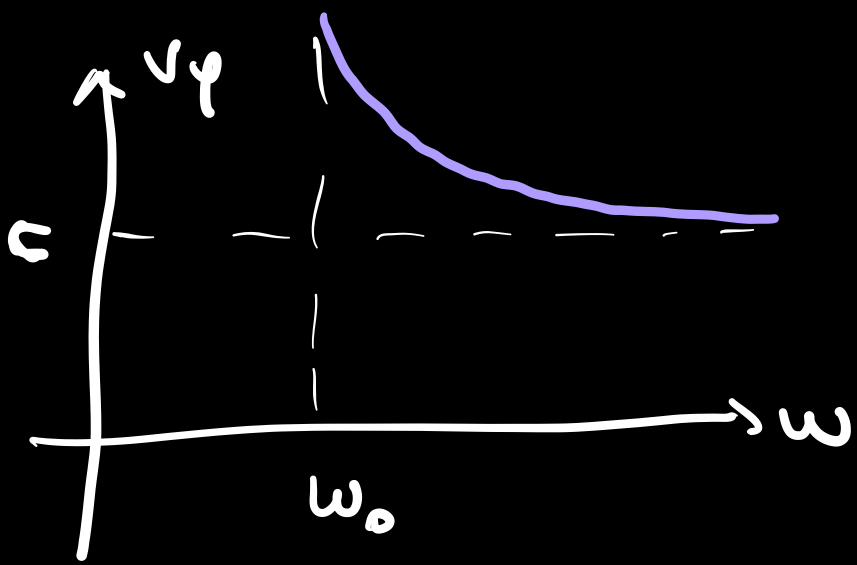
Si $\omega\to+\infty$ alors $k^2\simeq\frac{\omega^2}{c^2}$ et $v_\varphi\simeq c$: on retrouve l'eqn de D'Alembert : le milieu est excité bien au-delà de sa fréq. caract. et est totalem^t inerte.

* Si $\omega<\omega_0$ alors $\underline{k}=-i\frac{\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{c}=-ik''$

en ne garde qu'1 sol^ᵒ car pas de dV

et $\boxed{v_\varphi \text{ n'est pas déf.}}$

Rq : Parfois, on appelle ω_0 la pulsa° plasma.



Rq 2 : Ds 1 plasma, c est la célérité de la lumière ds le vide MAIS cela ne contredit pas les lois de la RR car v_φ n'est pas la vitesse de propaga° d'1 signal φ (c'est le cas d'1 paquet d'onde, + ⊕ loin).

• Structure de l'onde :

* Si $\omega < \omega_0$, alors $A(x,t) = A_0 e^{-k''x} \cos(\omega t + \varphi)$

↳ on obtient 1 OS dont l'amplitude décroît exp : c'est 1 onde évanescente

↳ il y a atténua° ∅ propaga°.

* si $\omega > \omega_0$ alors $A(x,t) = A_0 \cos(\omega t \pm k'x + \varphi)$

↳ on obtient 1 OPPS : il y a propaga° ∅ atténua°.

• <u>Aspect énergétiq</u> : × L'eqn de K-G traduit 1 propagaº rév., i.e. ∅ échange d'énergie avec le milieu × donc ∅ absorpº.

<u>Rappel</u>: Pour 1 fil de torsion

$$M = -C(\theta - \theta_0)$$

$$\delta W = M\,d\theta = -C(\theta-\theta_0)\,d\theta$$

$$= -dE_{pt}$$

où $E_{pt} = \frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2$.

<u>DONC</u> pour 1 pendule, l'énergie mécaniq

$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pt}$ est conservée.

Or $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_n^2 - mg\ell\cos\theta_n + \frac{1}{4}C(\theta_n - \theta_{n+1})^2$

répartis entre les 2 pendules

$$+\frac{1}{4}C(\theta_n - \theta_{n-1})^2$$

$$= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}mg\ell\,\theta^2 \quad = m\ell^2\omega_0^2$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{Ca^2}_{= m\ell^2c^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \omega_0^2\theta^2\right]$$

• On peut donc déf. 1 densité linéiq d'énergie:

$$\mathcal{E} = \frac{E_m}{a} = \frac{m\ell^2}{2a}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \omega_0^2\theta^2\right]$$

masse linéiq

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \frac{m\ell^2}{a}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial t} + \omega_0^2\frac{\partial\theta}{\partial t}\theta\right\}$$

$$= \frac{m\ell^2}{a}\left\{c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} + c^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial t}\right\}$$

$$= \frac{m\ell^2c^2}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0 \quad \text{où } \Pi = -\frac{m\ell^2c^2}{a}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

- Pour $\omega < \omega_0$ (onde évanescente),

$$\theta(x,t) = \theta_0\, e^{-k''x}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) = -k''\theta_0\, e^{-k''x}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = -\omega\theta_0\, e^{-k''x}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \Pi(x,t) \propto e^{-2k''x}\sin(2\omega t + 2\varphi)$$

DONC $\boxed{\langle\Pi(x,t)\rangle = 0}$

↳ Ainsi, l'onde n'est pas transmise ds le milieu & se réfléchit totalem^t à l'entrée. Il n'y a donc pas de dissipaᵒ par le milieu car sinon $\langle \Pi \rangle \neq 0$ et décroîtrait au cours de la propagaᵒ.

- Attenᵒ, c'est $\langle \Pi \rangle = 0$ et pas Π, ce qui signifie q de l'énergie entre & sort du milieu mais qu'en moyenne sur 1 période, aucune énergie n'est rentrée ou sortie ds le milieu.

b) DDLs supplémentaires

- L'existence de DDLs supplémentaires permet de stocker l'énergie & de la restituer ultérieurem^t.
- C'est le cas de la corde de Melde avec raideur $< \infty$.
- Calcul de la R.D.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EI}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + \underline{k}^2 c^2 + \frac{EI}{\mu} \underline{k}^4 = 0$$

$$\underline{k}^4 + \frac{\mu c^2}{EI}\underline{k}^2 - \frac{\mu\omega^2}{EI} = 0$$

$$\Delta = \frac{\mu^2 c^4}{E^2 I^2} + \frac{4\mu\omega^2}{EI} = \frac{\mu^2 c^4}{E^2 I^2}\left[1 + \frac{4EI\omega^2}{\mu c^4}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -\frac{\mu c^2}{2EI}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4EI\omega^2}{\mu c^4}}\right]$$

↳ 1 branche (+) $\underline{k}^2 < 0$

$$\Rightarrow \underline{k} = -ik'' \text{ avec } k'' = \sqrt{\frac{\mu c^2}{2EI}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4EI\omega^2}{\mu c^4}}\right]}^{1/2}$$

↳ 1 branche (−) $\underline{k}^2 > 0$

$$\Rightarrow \underline{k} = k' \text{ avec } k' = \pm\sqrt{\frac{\mu c^2}{2EI}\left[\sqrt{1 + \frac{4EI\omega^2}{\mu c^4}} - 1\right]}^{1/2}$$

CSQ : Pour ∀ ω, il y a superposiꝋ d'ondes évanescentes et d'ondes progressives dont la propagaꝋ est dispersive.

• Limite BF : $\frac{EI\omega^2}{\mu c^4} \ll 1$

↳ branche (+) : $k'' = \sqrt{\dfrac{\mu c^2}{EI}}$

↳ branche (−) : $k' = \pm\sqrt{\dfrac{\mu c^2}{2EI}}\sqrt{\dfrac{2EI\omega^2}{\mu c^4}}$

$$= \pm \frac{\omega}{c}$$

=> on retrouve le comportem^t de la corde $\varnothing$ flexion ($E=0$)

↳ normal car le terme de flexion va dominer qd la corde est fortem^t courbée, i.e. à petites longueurs d'onde (i.e. grandes pulsa°).

c) Dissipa°

- La dissipa°, i.e. l'amortissem^t de l'onde peut résulter de la dispersion.

- C'est le cas de l'eqn des télégraphistes.

- RD: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r\Gamma + g\Lambda)\dfrac{\partial u}{\partial t} + rgu$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = (r\Gamma + g\Lambda)\, i\omega + rg$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg - (r\Gamma + g\Lambda) i\omega$$

• Ds le cas gal, $\underline{k} \in \mathbb{C}$ DONC il y a dispersion & atténuaO.

• Par contre, il existe 1 cas (conditiO de Heaviside) t.q la propagaO est non dispersive (mais avec atténuaO).

$$\underline{k}^2 = (k' - ik'')^2 = k'^2 - k''^2 - 2ik'k''$$

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg \\ -2k'k'' = -(r\Gamma + g\Lambda)\omega \end{cases}$$

On veut q̄ k' soit linéaire en ω pour q̄ $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ soit 1 cste.

$$\Rightarrow k' = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

et $\begin{cases} \frac{\omega^2}{v_\varphi^2} - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - rg \\ 2k'' = v_\varphi (r\Gamma + g\Lambda). \end{cases}$

Cela n'est possible q̄ si $v_\varphi = c$ et

$$r g = \frac{v_\varphi^2}{4}(r\Gamma + g\Lambda)^2 = \frac{1}{4\Lambda\Gamma}(r\Gamma + g\Lambda)^2$$

$$\Rightarrow \quad (r\Gamma - g\Lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r\Gamma = g\Lambda} \qquad \text{et } k'' = v_\varphi g \Lambda = \sqrt{rg}$$

- <u>CSQ</u>: On peut avoir tous les cas possibles
  ↳ propagat° ∅ dispersion ni atténuat°
  ↳ propagat° avec dispersion ∅ atténuat°
  ↳ propagat° ∅ dispersion avec atténuat°
  ↳ atténuat° ∅ propagat°.

II. INFLUENCE DE LA DISPERSION

1) Construct° d'1 paquet d'onde

- On a déjà vu ds le chap. précédent l'intérêt de considérer des paquets d'onde pour avoir 1 signal φ.

- On procède ici de la m̃ manière q̃ D'Alembert mais en Σ les OP3S.
  <u>PBM</u>: $k \in \mathbb{C}$ donc il faut maintenant $\int$ sur ω:

$$\boxed{A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) e^{i(\omega t - \underline{k}(\omega) x)}}$$

où $\underline{k}(\omega)$ est donné par la RD.

Rq: On a pris $\omega \in \mathbb{R}$, ce qui revient à considérer les ≠ branches pour $\underline{k}$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$.

⚠ La condiθ $A(x,t)$ réel n'est plus $\bar{q}$ a est à sym. hermitienne car $\underline{k}(\omega) \in \mathbb{C}$.

2) Dispersion au 1er ordre

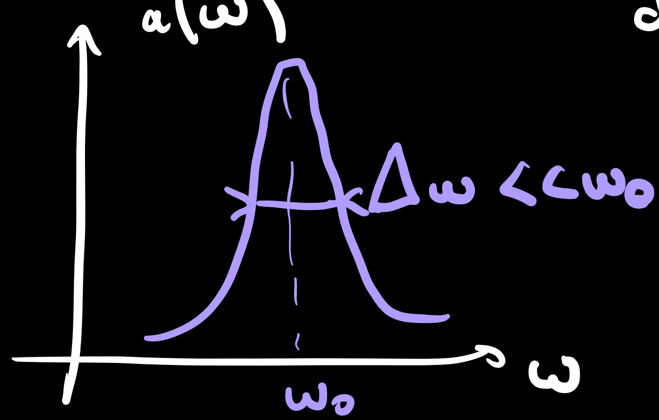
a) Évoluθ du paquet d'onde

- On veut étudier la propagaθ avec dispersion. ↳ Ds le cas de l'EOC, v_φ = cste et toutes les OPPS se propagent à la m̄ vitesse : propagaθ ∅ déformaθ du paquet d'onde.
- Ici, on s'attend à 1 déformaθ du paquet d'onde car $v_\varphi(\omega)$.
- Pour simplifier, on considère le cas d'1 propagaθ ∅ atténuaθ, i.e. $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) \in \mathbb{R}$.

Alors : $$A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega) x)}$$

avec $a^*(\omega) = a(-\omega)$.

- De ⊕, pour mettre en évidence ⊕ facilem^t l'effet de la dispersion, nous allons considérer le cas d'1 paquet d'onde peu étalé spectralem^t, soit 1 paquet d'onde de grande durée temporelle.



- Cela va nous permettre de faire 1 DL :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega-\omega_0)\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega_0}$$

- On va considérer la dispersion au 1^er ordre, i.e. on va négliger le 2^nd ordre. Cela ne sera possible $\bar{q}$ si :

$$\Delta\omega\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} \gg \Delta\omega^2\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega_0}$$

$$\iff \quad \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} \gg \Delta\omega\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega_0}$$

DONC, on voit $\bar{q}$ dire qu'1 milieu est faiblem^t dispersif n'a pas de sens en soi car cela dépend de l'extension spectrale du paquet d'onde considéré.

- On aura alors :

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) e^{i\left[\omega t - k(\omega_0)x - (\omega-\omega_0)x \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0}\right]}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} a(\omega_0+\Omega) e^{i\left[\omega_0 t - k(\omega_0)x\right]} e^{i\Omega\left[t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0} x\right]}$$

$$\boxed{A(x,t) = \underbrace{e^{i\omega_0\left[t - x/v_\varphi(\omega_0)\right]}}_{\text{porteuse qui se propage à la vitesse de } \varphi} \times \underbrace{\mathcal{A}\left(t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0} x\right)}_{\text{enveloppe qui se propage à la vitesse } \frac{d\omega}{dk}\big|_{\omega_0} \text{, } \not\!\text{ se déformer}}}.$$

modulation AM → enveloppe

- On définit alors la vitesse de groupe

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \left(\vec{v_g} = \vec{\nabla}_{\vec{k}}\,\omega\right)}$$

- Ds le cas g^{al} $v_g \neq v_\varphi$ car si c'était le cas partout alors on aurait :

$$\frac{d\omega}{dk'} = \frac{\omega}{k'} \iff d\ln\omega = d\ln k'$$

$$\iff \omega = ck'$$

$$\iff \text{EOC (car OS } k''=0)$$

- Ainsi, on peut égalemᵗ dire q̄ la propagaᵒ est dispersive si $v_g(\omega)$.

- Interprétaᵒ : • C'est la vitesse de propagaᵒ de l'enveloppe d'1 paquet d'onde quasi-m, ds l régime de faible dispersion uniquemᵗ.
  - C'est aussi la vitesse de propagaᵒ de l'énergie car cette dernière est prop. à l'amplitude de l'onde au carré généralemᵗ.

- L'enveloppe se déplace car toutes les OPPS ne se propagent pas à la m̂ vitesse, de sorte q̄ le lieu d'interférences constructives change au cours de la propagaᵒ.

- Cela est bien illustré par la méthode de la φ stat. qui est l autre manière de trouver l'évoluᵒ de la posiᵒ du max. de l'enveloppe.
  ↳ les lieux d'interférences constructives

correspondent au cas où toutes les OPPS constituant le paquet d'onde sont en φ, i.e. le déphasage est ind. de ω.

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x)}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |a(\omega)| e^{i\phi(\omega,x,t)}$$

où $\phi(\omega,x,t) = \arg(a(\omega)) + \omega t - k(\omega)x$.

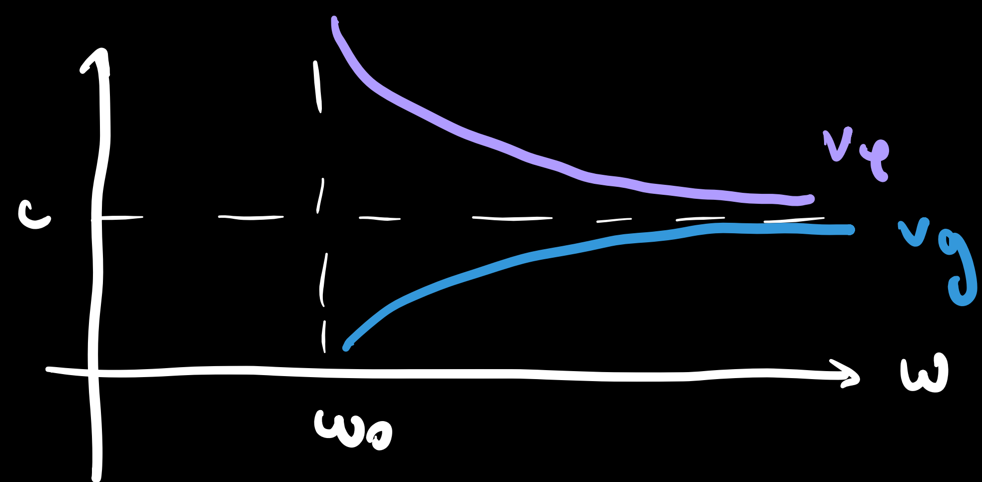
la méthode de la φ stat. donne alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0 \iff \frac{d}{d\omega}\left[\arg(a(\omega))\right] + t - \frac{dk}{d\omega}x$$
$$\iff x = v_g t + \text{cste}$$

• <u>Applicat°</u> : - EOC : $v_g = v_\varphi = c$

- KG : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$

si $\omega > \omega_0$



En part. $v_g < c$, en accord avec les lois de RR.

Rq: Ds le cas de K-G, on peut mq v_g est bien la vitesse de propagao de l'énergie.

$$\boxed{v_e = \frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle}}$$

$$\theta(x,t) = \theta_0 \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi)$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{ml^2}{4a}\theta_0^2\left[\omega^2 + k^2 + \omega_0^2\right]$$

$$= \frac{ml^2}{2a}\theta_0^2\omega^2$$

$$\langle \Pi \rangle = \frac{ml^2c^2}{2a}\theta_0^2\omega k(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \frac{c^2 k(\omega)}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$= v_g$$

b) Régimes de dispersion

- Par analogie avec l'optiq, on dif. 2 régimes de dispersion:

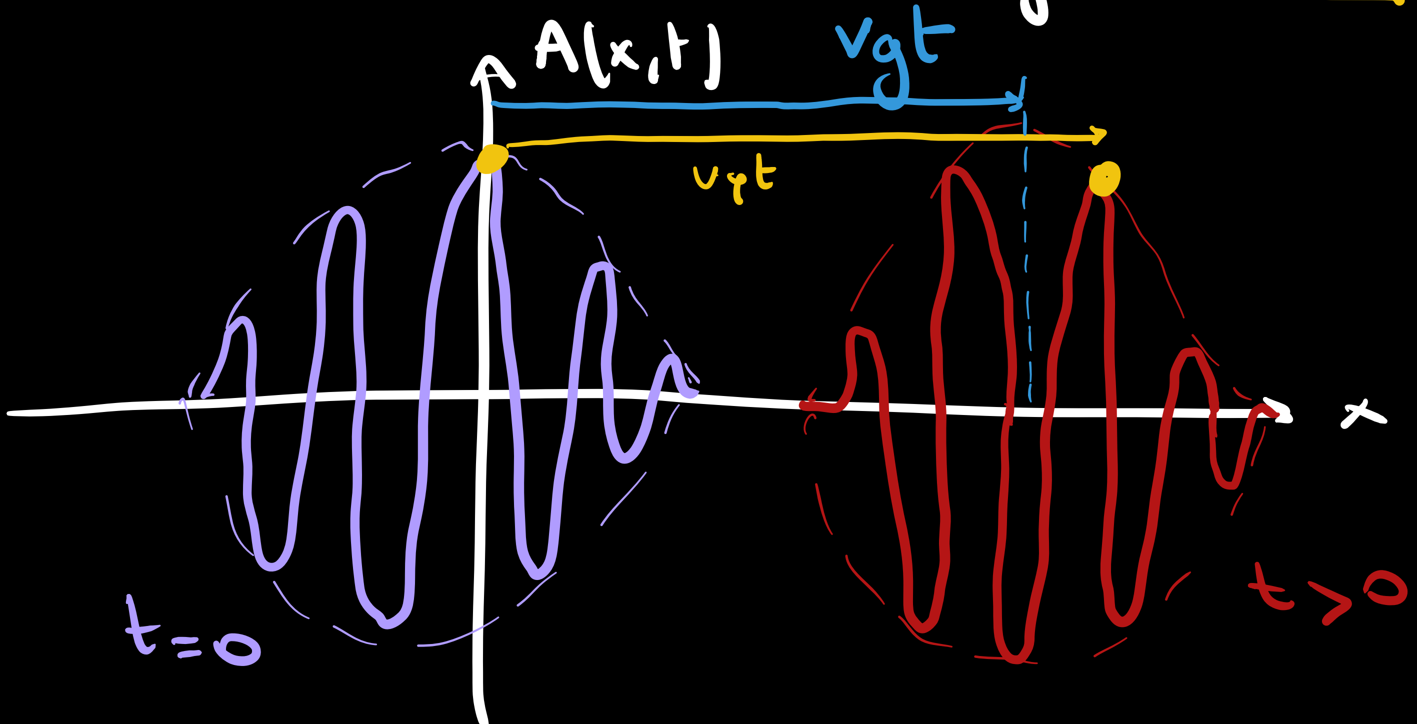
* normale si $\boxed{v_\varphi > v_g}$,
* anormale si $\boxed{v_\varphi < v_g}$.

ex: Pour l'eqn de K-G, on est ds le régime de dispersion normale.

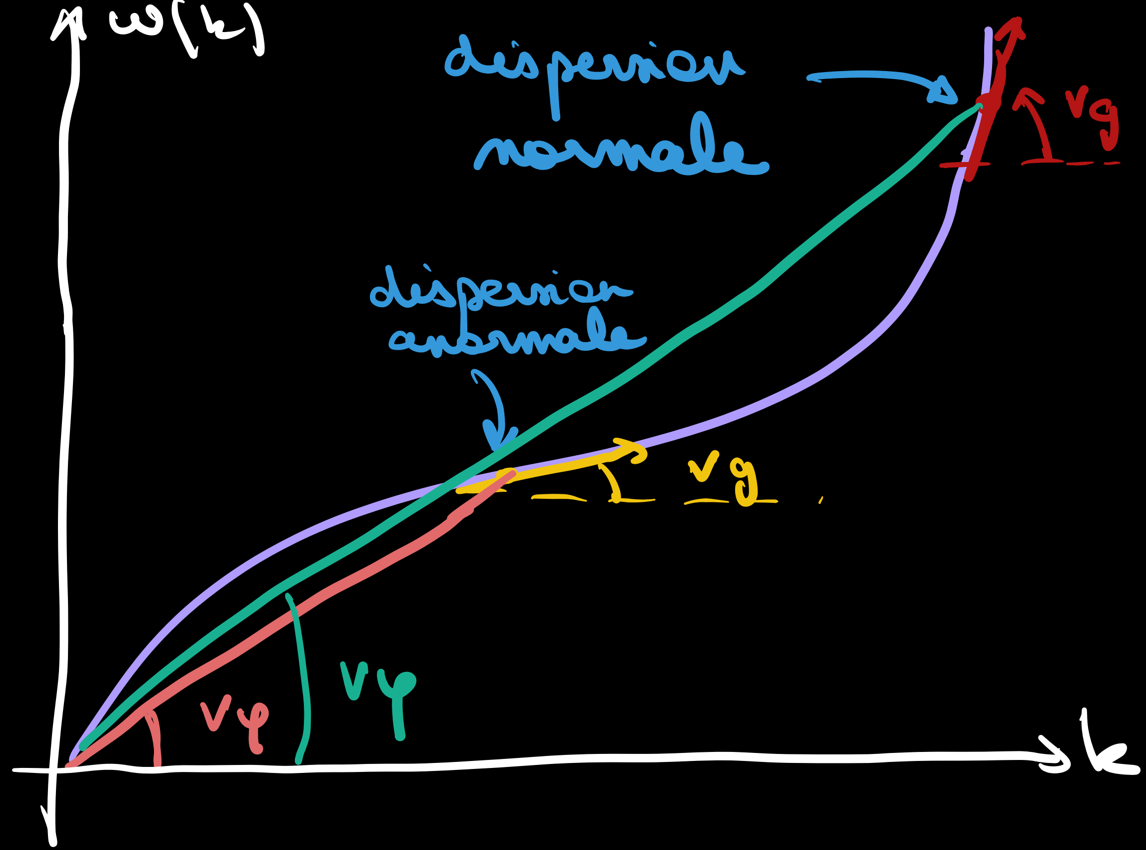
ex 2: Schrödinger $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \Rightarrow \omega(\vec{k}) = \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}$

$\begin{cases} \vec{v_\varphi} = \frac{\hbar\vec{k}}{2m} \\ \vec{v_g} = \frac{\hbar\vec{k}}{m} \end{cases}$ → propagaθ avec dispersion anormale

* Ds les 2 cas, on observe 1 glissem^t de Ψ.



* À quelle conditiθ on est ds 1 régime de dispersion normale | anormale ?
  ↳ on trace la RD:



↳ formule de Rayleigh

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)} \iff v_\varphi(k') = \frac{\omega(k')}{k'}$$

$$\frac{dv_\varphi}{dk'}(k') = \frac{v_g(k')}{k'} - \frac{v_\varphi(k')}{k'}$$

$$\Rightarrow v_g = v_\varphi + k'\frac{dv_\varphi}{dk'}(k')$$

$$\boxed{v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \quad \text{où } \lambda = \frac{2\pi}{k'}}$$

⇒ on en déduit que la dispersion est normale si $v_\varphi \nearrow$ qd $\lambda \nearrow$.

c) Absorpt° & dispersion anormale

- Si $\underline{k}(\omega)$ est 1 f° $\mathbb{C}$ analytiq̄ ds le demi-plan supérieur (pour $\omega \in \mathbb{C}$) alors $k'(\omega)$ et $k''(\omega)$ sont reliées par les relaΘ de Kramers-Kronig

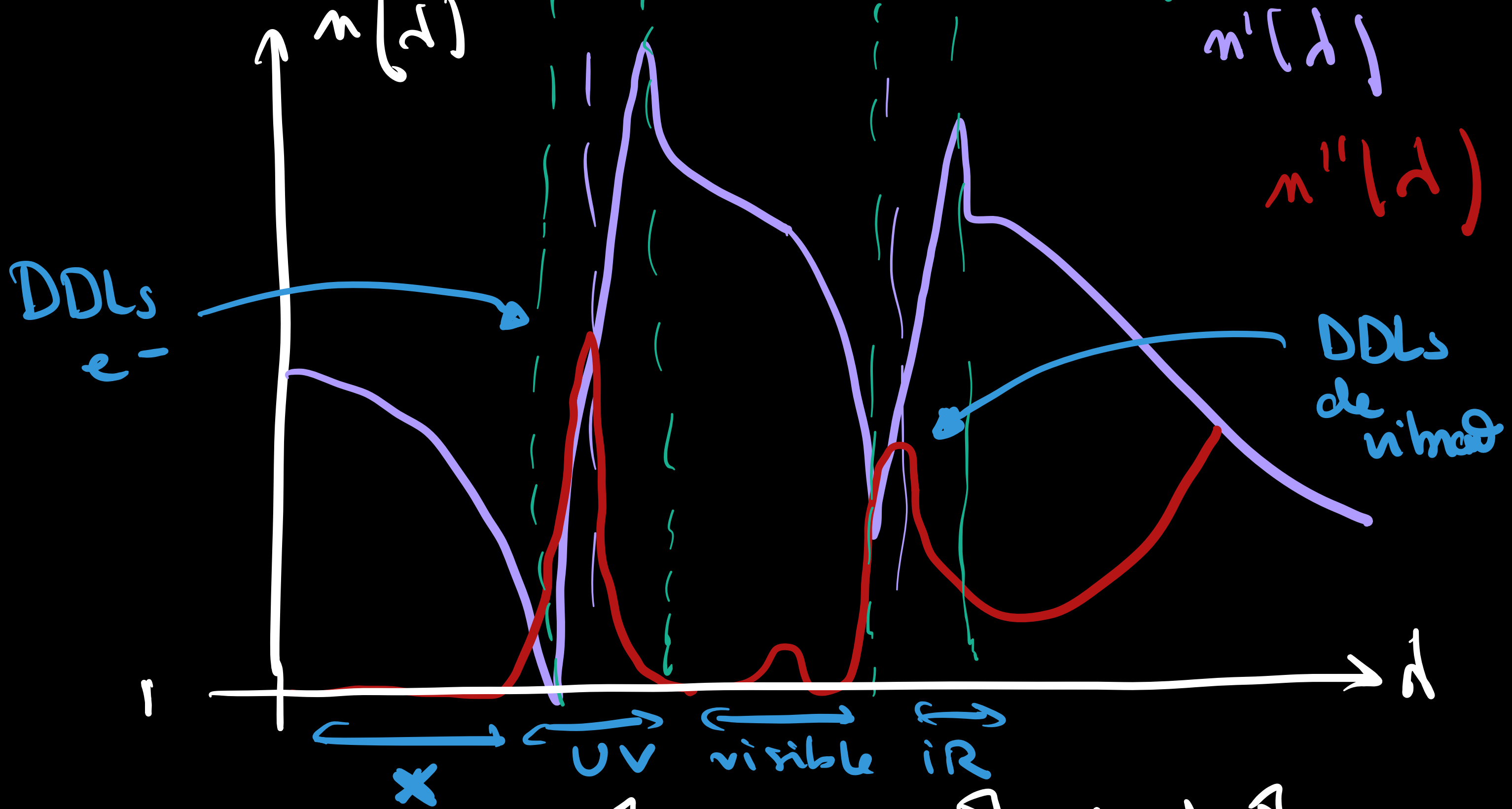
$$\boxed{\begin{cases} k'(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\, \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{k''(\Omega)}{\Omega - \omega}\, d\Omega \\[2ex] k''(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\, \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{k'(\Omega)}{\omega - \Omega}\, d\Omega \end{cases}}$$

- <u>Rq</u>: ce n'est pas vrai pour K-G car $\underline{k}(\omega)$ varie discontinûmt à ω_0.

- C'est essentiellemt le cas en présence d'<u>absorpΘ</u> (<u>ex</u>: ondes em ds 1 diélectriq̄).

$$\hookrightarrow \begin{cases} v_\varphi(\omega) = \dfrac{c}{n'(\omega)} \\[2ex] v_g(\omega) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} k'(\omega) = \dfrac{\omega}{c} n'(\omega) \\[2ex] k''(\omega) = \dfrac{\omega}{c} n''(\omega) \end{cases}$$

• Ex : eau



$n'(\lambda) \searrow$ qd $\lambda \nearrow \Rightarrow v_\varphi \nearrow$ qd $\lambda \nearrow$
$\Rightarrow$ dispersion normale

↳ on observe de la dispersion normale sauf ds les bandes d'absorp° où la dispersion est anormale.

↳ loin des bandes d'absorp°, le régime de faible dispersion est vérifié : les résultats précédents sont corrects.

↳ proche & ds les bandes d'absorp°, n' varie brusquem^t (k' aussi) et n'' n'est pas négligeable : les résultats précédents ne sont pas corrects.

On a alors $v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda} = v_\varphi + \frac{dv_\varphi}{n'} \frac{dn'}{d\lambda}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{v_g}{c} = \frac{1}{n'}\left[1 + \frac{\lambda}{n'}\frac{dn'}{d\lambda}\right] = \frac{1}{n'}\left[1 + \frac{d\ln n'}{d\ln\lambda}\right]$$

Ds la bande d'absorpº $\frac{dn'}{d\lambda} > 0$ et la vitesse de groupe peut devenir > à c. En frontière de bande, $\frac{dn'}{d\lambda} < 0$ et la vitesse de groupe peut devenir < 0.

⚠ interprétaº du Portelli à prendre avec des pincettes ($\omega \leftrightarrow \lambda$).

- CSQ: v_g n'est plus la vitesse de propagaº de l'énergie ds les zones de forte dispersion, en part. (mais pas seulem^t) ds les zones de forte absorpº.

RQ: Ds les zones de forte dispersion & absorpº, il faut introduire 2 nouvelles vitesses: celle de propagaº du signal (qui dépend de sa forme & qui diffère de v_φ) et la vitesse de propagaº de l'énergie (qui diffère de v_g et qui reste < à c), car le paquet d'onde se déforme très largem^t.

3) Dispersion au 2nd ordre

- Au 1er ordre, l'enveloppe se propageait ∅ se déformer. Qu'en est-il au 2nd ordre ?
  → on veut décrire la déformat° du paquet d'ondes.

- On poursuit le DL de la RD au 2nd ordre, tjs ds l'hyp. d'absence d'atténuat° et pour 1 paquet d'onde quasi ~ (ici on préfère 1 DL de ω en f° de k) :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \frac{1}{2}(k-k_0)^2 \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0}$$

- <u>Qualitativem^t</u> : Pour 1 paquet d'onde 1 peu ⊕ large spectralem^t q̄ précédemm^t (de telle sorte qu'on ait besoin d'1 DL$_2$ de la RD), on peut le décomposer en 1 superposit° de paquets d'onde étroits spectralem^t qui se propagent ∅ déformat° à v_g.
MAIS comme $v_g(k)$, les ≠ paquets d'onde se propagent à des vitesses ≠ et on va obs. ā tps longs 1 étalem^t du paquet d'onde global.

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = v_g(k_0) + \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0}(k-k_0)$$

→ on voit l'étalem^t comme 1 incertitude sur la posit° du maximum du paquet d'onde

Il y a 2 sources d'incertitudes : (i) l'étalem^t initial du paquet d'onde et (ii) la dispersion des vitesses de groupe.

Par compositⁿ des incertitudes, comme $x(t) = x(0) + v_g t$, on a : $\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \Delta v_g^2 t^2$

avec $\Delta v_g \simeq \frac{d^2\omega}{dk^2} \Delta k \simeq \frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{1}{\Delta x(0)}$

(ppté de la TF sur les largeurs réelle et spectrale)

- En réalité, ici on travaille avec des écarts-types, donc il faudrait écrire :

$$\boxed{\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x_0^2 + \left[\frac{2tP}{\Delta x_0}\right]^2}}$$

$\Delta x_0 = \Delta x(0)$ où $k_0 = k(\omega_0)$ et $\boxed{P = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k_0}}$

- Pptés : (1) le paquet d'onde s'étale au cours du tps : $\Delta x(t) \nearrow$ qd $t \nearrow$.

(2) L'étalem^t est balistiq à tps longs : $\Delta x(t) \sim t$

(3) le tps typiq d'étalem^t est t.q

$$\Delta x_0 \sim \frac{\tau_e}{\Delta x_0}\left|\frac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k_0}\right|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau_e = \frac{\Delta x_0^2}{2|P|}}$$

↳ il ↘ qd Δx_0 ↘ et qd la dispersion ↗, autrem^t dit les paquets d'onde peu étendus s'étalent ⊕ vite.

• **Quantitativem^t:** (on écrit le paquet d'onde en f^o de k plutôt q̄ ω car on a vu q̄ c'était la dérivée seconde de ω par rapport à k qui comptait).

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i[\omega(k)t - kx]}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i[\omega(k_0)t + (k-k_0)v_g(k_0)t + (k-k_0)^2 \beta t - k_0 x - (k-k_0)x]}$$

$$= e^{ik_0[v_\varphi(k_0)t - x]} A_e(x,t)$$

où $A_e(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} a(k_0+K) e^{iK[v_g t - x]} e^{iK^2 \beta t}$

On cherche alors 1 eqn vérifiée par l'envelop-pe. Pour cela, on remarq q̄ :

$$\underset{x}{TF}[A_e](K,t) = a(k_0+K) e^{iKv_g t} e^{i\frac{K^2}{2}\beta t}$$

$$= \tilde{A_e}(K,t)$$

Alors $\dfrac{\partial \tilde{A_e}}{\partial t} = (iKv_g + iK^2\beta)\tilde{A_e}$

et $TF_x\left[\frac{\partial A_e}{\partial x}\right] = -iK\tilde{A_e}$

DONC en prenant la TF^{-1} de l'eqn précédente, on trouve :

$$\frac{\partial A_e}{\partial t} = -v_g\frac{\partial A_e}{\partial x} - iP\frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2}$$

$$i\left[\frac{\partial A_e}{\partial t} + v_g\frac{\partial A_e}{\partial x}\right] = P\frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2}$$

- On se place ds le réf. coïncidant avec le sommet de l'enveloppe, i.e. se déplaçant à la vitesse de groupe.

$$\begin{cases} \xi = x - v_g t \\ \tau = t \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} \dfrac{\partial A_e}{\partial t} = \dfrac{\partial A_e}{\partial \tau} - \dfrac{\partial A_e}{\partial \xi}v_g \\ \dfrac{\partial A_e}{\partial x} = \dfrac{\partial A_e}{\partial \xi} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{i\frac{\partial A_e}{\partial \tau} = P\frac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2}}$$

. Ppté : 1) C'est l'eqn de Schrödinger : en part. elle décrit la propagat° rév. du paquet d'onde.

2) Elle ressemble à l'eqn de la chaleur : en part., on s'attend à l'étalem^t de l'enveloppe.

. On peut résoudre exactem^t l'eqn précédente en introduisant la TF "spatiale" de A_e (comme pour résoudre l'eqn de diffusion) :

$$\tilde{A_e}(q,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, A_e(\xi,\tau) e^{iq\xi}$$

$$\Leftrightarrow A_e(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{A_e}(q,\tau) e^{-iq\xi}$$

Alors $\begin{cases} \dfrac{\partial A_e}{\partial \tau} \xrightarrow[TF]{} \dfrac{\partial \tilde{A_e}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial A_e}{\partial \xi} \xrightarrow[TF]{} -iq \tilde{A_e} \end{cases}$

$$\Rightarrow i \frac{\partial \tilde{A_e}}{\partial \tau} = - q^2 P \tilde{A_e}$$

$$\hookrightarrow \tilde{A_e}(q,\tau) = \tilde{A_e}(q,0) e^{iq^2 P\tau}$$

DONC finalem^t, on a :

$$\boxed{A_e(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{A_e}(q,0)\, e^{-iq\xi + iq^2 P\tau}}$$

. Cas particulier: paquet d'onde Gaussien

$$A_e(x,0) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow A_e(\xi,0) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \tilde{A_e}(q,0) = A_0 \, e^{-\frac{q^2\sigma^2}{2}}$$

DONC $A_e(\xi,\tau) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{-\frac{q^2\sigma^2}{2} - iq\xi + iq^2 P\tau}$

$$A_e(\xi,\tau) = \frac{A_0}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2} - iu\xi/\sigma + i\frac{\tau}{\sigma^2}u^2 P}$$

$$= \frac{A_0}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(1 - 2i\frac{P}{\sigma^2}\tau\right)u^2 - iu\xi/\sigma}$$

$$= \frac{A_0}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2iP}{\sigma^2}\tau\right)\left[u + \frac{i\,\xi/\sigma}{1-\frac{2iP}{\sigma^2}\tau}\right]^2} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2\left(1-\frac{2iP}{\sigma^2}\tau\right)}}$$

$$= \frac{A_0}{2\pi\sigma}\sqrt{\frac{2\pi}{1-\frac{2iP}{\sigma^2}\tau}} \; e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2\left(1-\frac{2iP}{\sigma^2}\tau\right)}}$$

or $1-\frac{2iP\tau}{\sigma^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2P\tau}{\sigma^2}\right)^2}\, e^{-i\phi}$

où $\phi=\arctan\left(\frac{2P\tau}{\sigma^2}\right)$

$$\Rightarrow A_e(\xi,t)=\frac{A_0\, e^{i\phi/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}\left[1+\left(\frac{2P\tau}{\sigma^2}\right)^2\right]^{1/4}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\frac{\left(1+\frac{2iP}{\sigma^2}\tau\right)}{1+\left(\frac{2P\tau}{\sigma^2}\right)^2}}$$

$$\hookrightarrow \boxed{|A_e(\xi,t)|\propto e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(t)^2}} \quad \text{où } \sigma(t)=\sqrt{\sigma^2+\left(\frac{2P\tau}{\sigma}\right)^2}}$$

Donc le paquet d'onde reste Gaussien et s'étale. De ⊕, on a trouvé exactem^t ce que nous avions obtenu de manière qualitative.

RQ : Les résultats obtenus ds cette secᵒ sont en réalité exacts (et pas $1DL_2$) si la RD est quadratiq, i.e. $\omega(k)\propto k^2$. C'est le cas de l'eqn de Schrödinger.

4) Impédance propagative

• Ds le cas g^al, on ne peut plus déf. d'impédan ce propagative contrairement à l'eqn de D'Alembert

i) il y a à priori plus de 2 grandeurs couplées (dispersion due à des DDLs supplémentaires)

ii) les sol° ne sont plus obtenues par la méthode des caractéristiq.

- Si on se restreint aux OP3S pour 1 phénomène lin., alors toutes les grandeurs seront harmoniq x donc prop.

↳ on peut étendre la not° d'impédance ds ce cas MAIS à priori $\underline{Z}(\omega)$.

complexe

dépend de ω

- Ex : câble coax. avec pertes

$\underline{i}(x,t) = \underline{i_0}\, e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} - r i$

↳ $-i\underline{k}\,\underline{u} = -\Lambda i\omega \underline{i} - r\underline{i}$

$\Rightarrow \underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{r + i\omega\Lambda}{i\underline{k}}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{Z}(\omega) = \dfrac{\omega\Lambda - ir}{\underline{k}}}$

III. AUTRES SOURCES DE DISPERSION

1) Dispersion par les NLs

- Qualitativem^t, ds le cas d'1 eqn d'onde NL, on peut avoir 1 compensat° de la dispersion par les NLs : on peut donc avoir propagat° d'1 paquet d'onde localisé en tps/espace qui se propage $\not\!\phi$ déformat°.
  ↳ onde solitaire ou soliton.

a) Soliton ds 1 fibre optiq̄

(I) faisceau lumineux intense : effet Kerr optiq̄ ∝ eqn de Schrödinger NL.

Pour 1 diélectriq̄ centrosym. éclairé par 1 chp $\vec{E}$ intense, l'indice optiq̄ varie selon la loi

$$n(\omega, I) = n_0(\omega) + \frac{\alpha}{\omega} I \quad \text{où} \begin{cases} \alpha > 0 \text{ cte} \\ I : \text{intensité lumineuse.} \end{cases}$$

Alors en dehors des bandes d'absorpt°, et pour 1 paquet d'onde quasi-∼, on a :

$$k = \frac{n(\omega, I)\,\omega}{c} = \frac{n_0(\omega)\,\omega}{c} + \frac{\alpha}{c} I$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{c}{n_0(\omega)} \left[k - \frac{\alpha}{c} I \right] = \omega(k, I)$$

Alors $\omega = \omega(k_0, 0) + (k - k_0) \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0, 0}$

$$+\frac{1}{2}(k-k_0)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big|_{k_0,0} + \frac{\partial \omega}{\partial I}\Big|_{k_0,0} I,$$

ds l'hyp. où on peut négliger tous les termes suivants du dvpt :

- $\frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2}\Big|_{k_0,0} I^2 \ll \frac{\partial \omega}{\partial I}\Big|_{k_0,0} I$

  $\hookrightarrow$ régime de faible intensité

- $\frac{\partial^2 \omega}{\partial I \partial k}\Big|_{k_0,0} I(k-k_0) \ll \frac{\partial \omega}{\partial I}\Big|_{k_0,0} I,$
  $\frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_{k_0,0}(k-k_0)$

  $\hookrightarrow$ régime de faible intensité et paquet d'onde peu évalé spectralem^t

. On peut réécrire la RD sous la forme :

$$\omega = \omega_0 + (k-k_0)v_g + (k-k_0)^2 P - Q I$$

. On peut alors obtenir la nouvelle eqn d'enveloppe :

$$i \frac{\partial A_e}{\partial t} = P \frac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} + Q I A_e \quad \text{et} \quad I = |A_e|^2$$

$$\boxed{i \frac{\partial A_e}{\partial t} = P \frac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} + Q |A_e|^2 A_e} \quad \text{où } Q > 0.$$

La eqn de Schrödinger NL

De ⊕ $$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{n_0(k)} - \frac{c}{n_0^2(k)}\frac{dn_0}{dk}\left[k - \frac{\alpha I}{c}\right]$$

$$= \frac{c}{n_0(k)}\left\{1 - \frac{k}{n_0(k)}\frac{dn_0}{dk}\right\}$$

$$+ \frac{\alpha}{n_0^2}\frac{dn_0}{dk} I.$$

Donc $$\frac{\partial\omega}{\partial k} = v_g(k,0) + \frac{\alpha}{n_0^2}\frac{dn_0}{dk} I$$

soit $$P = \frac{1}{2}\frac{\partial v_g}{\partial k}\Big|_{k_0,0} = -\frac{\pi}{k^2}\frac{dv_g}{d\lambda}$$

or $$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right) = -\frac{1}{v_g^2}\frac{dv_g}{d\lambda} \Rightarrow P = \frac{\pi v_g^2}{k^2}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right)$$

$$= -\pi\frac{v_g^2}{kc}\lambda\frac{d^2n'}{d\lambda^2}$$

Rayleigh

$$= -\frac{\lambda^2 v_g^2}{2c}\frac{d^2n'}{d\lambda^2}.$$

Ainsi ds les régions de dispersion normale, on a le ⊕ souvent $\frac{d^2n'}{d\lambda^2} \cancel{<} 0$, soit $P > 0$.

Par contre il peut exister des cas où $P < 0$.

De ⊕ ds les zones de dispersion anormale, on peut avoir $P > 0$ ou $P < 0$.

• Quel est l'effet du terme NL ?

$$i\frac{\partial A_e}{\partial \tau} = Q|A_e|^2 A_e$$

• On cherche $A_e(\tau) = A_0 e^{i\theta(\tau)}$

Alors $-A_0\theta'(\tau)e^{i\theta(\tau)} = Q A_0^3 e^{i\theta(\tau)}$

$$\Rightarrow \quad \theta'(\tau) = -Q A_0^2$$

$$\Rightarrow \quad A_e(\tau) = A_0 e^{-iQA_0^2\tau}$$

<u>DONC</u> $A(x,t) = A_0 e^{-iQA_0^2\tau} e^{i(\omega(k_0)t - k_0 x)}$

$$= A_0 e^{i[\omega_{NL}(k_0)t - k_0 x]}$$

où $\omega_{NL}(k_0) = \omega(k_0) - QA_0^2$

On a alors $v_{\varphi,NL} = \frac{\omega_{NL}(k_0)}{k_0} = v_\varphi - \frac{QA_0^2}{k_0}$

de sorte que $v_{\varphi,NL} \searrow$ qd $A_0 \nearrow$. Ainsi, la vitesse de $\varphi \searrow$ avec l'amplitude du paquet d'onde $\nearrow$.

$\Rightarrow$ c'est 1 effet de raidissement du paquet d'onde.

↳ Cela explique que la dispersion, qui étale le paquet d'onde, peut être compensée par les NLs.

- On peut comprendre égalem^t la compétit° à l'aide du 2 tps caract.
  ↳ celui de dispersion / étalem^t :
  $$\tau_e = \frac{\Delta x_0^2}{2|P|}$$
  ↳ celui des NLs / de raidissem^t :
  $$\boxed{\tau_r = \frac{1}{QI}}$$

* Si $\tau_e < \tau_r$ on observe l'étalem^t du paquet d'onde.
* Pour observer 1 soliton, i.e. pour qu'il y ait compensat°, il faut $\bar{q}$ $\tau_e \gtrsim \tau_r$ soit

$$I \sim \frac{2|P|}{Q\,\Delta x_0^2}$$

où Δx_0 est la largeur du soliton.

=> il faut donc envoyer 1 puissance min. pour $\bar{q}$ l'effet des NLs rentre en ligne de compte et qui ↗ qd Δx_0 ↘ car l'effet de la dispersion est d'autant ⊕ fort $\bar{q}$ le paquet d'onde est spatialem^t étroit.

- On peut alors chercher 1 sol° solitaire qui ne se déforme pas, i.e. $A_e(x,t) \propto A_e(x - v_g t)$

$\propto A_e(\xi)$.

Le facteur de prop. peut dépendre de τ mais ne doit pas changer l'énergie, soit

$$\boxed{A_e(\xi,\tau) = e^{i\theta(\tau)} A_e(\xi)}$$

où $\theta(\tau)$ est 1 f° réelle.

$\hookrightarrow -\frac{d\theta}{d\tau} A_e(\xi) e^{i\theta(\tau)} = \left[P \frac{d^2 A_e}{d\xi^2} + Q|A_e|^2 A_e\right] e^{i\theta(\tau)}$

$$-\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P}{A_e}\frac{d^2 A_e}{d\xi^2} + Q|A_e|^2$$
$$= \omega_s = \text{cste}$$

DONC, on en déduit q $A_e(\xi,\tau) = e^{-i\omega_s\tau} A_e(\xi)$

or $A(x,t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{-i\omega_s t} A_e(\xi)$
$$= e^{i(\omega_0 t - \omega_s t - k_0 x)} A_e(\xi)$$

DONC $\omega_s = \omega_0 - \omega$ et on a alors :

$$P\frac{d^2 A_e}{d\xi^2} + Q|A_e|^2 A_e = (\omega_0 - \omega) A_e$$

- On peut alors chercher la sol° sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} A_e(x,t) &= A_0 \operatorname{sech}(\alpha\xi). \\ &= \frac{A_0}{\cosh(\alpha\xi)} \end{aligned}}$$

On trouve alors $\dfrac{\partial A_e}{\partial \xi} = -\dfrac{A_0 \lambda}{\cosh^2(\lambda \xi)} \sinh(\lambda \xi)$

et $\dfrac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} = -A_0 \lambda^2 \left[\dfrac{1}{\cosh(\lambda\xi)} - 2 \dfrac{\sinh^2(\lambda\xi)}{\cosh^3(\lambda\xi)} \right]$

$$= A_0 \lambda^2 \operatorname{sech}(\lambda\xi) \left[2\tanh^2(\lambda\xi) - 1 \right]$$

Or $\tanh^2(u) = 1 - \operatorname{sech}^2(u)$

DONC $\dfrac{\partial^2 A_e}{\partial \xi^2} = A_0 \lambda^2 \operatorname{sech}(\lambda\xi) \left[1 - 2\operatorname{sech}^2(\lambda\xi) \right]$

En réinjectant, on obtient 1 sol° si

$$\begin{cases} P A_0 \lambda^2 = (\omega_0 - \omega) A_0 \\ -2 P A_0 \lambda^2 + Q |A_0|^2 A_0 = 0 \end{cases}$$

soit pour 1 sol° non trivialem^t nulle ($A_0 \neq 0$):

$$\lambda^2 = \frac{\omega_0 - \omega}{P} \quad \text{et} \quad |A_0|^2 = \frac{2P\lambda^2}{Q} = \frac{2(\omega_0 - \omega)}{Q}$$

Cela ne sera possible $\bar{q}$ si $\omega < \omega_0$ et $P > 0$.

Ds ce cas, on trouve l extension d^-1 du paquet d'onde, qui dépend d'1 param. libre ω_s.

Par ailleurs, on a : $\tau_e = \frac{1}{2P\delta^2}$

OK

et $\tau_r = \frac{1}{Q|A_0|^2} = \frac{1}{2P\delta^2} = \tau_e$

- On retiendra q̄ pour observer l soliton il faut q̄ $\boxed{PQ > 0}$, i.e. q̄ les 2 effets s'opposent.
- RQ : En l'abs. de NL, $Q = 0$ et l'eqn d'enveloppe devient :

$$\frac{d^2 A_e}{d\xi^2} = \frac{A_e}{\delta^2}$$

qui ne donnera jamais l sol° localisée ds l'espace (soit oscillante, soit dv à $\pm\infty$).

b) Soliton ds l chaîne de pendules

- On reprend l'exple de la chaîne de pendules mais au-delà de l'hyp. des petits angles :

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin\theta - c^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0}$$

↳ eqn de sine - Gordon (par analogie avec KG)

- là encore, on peut observer l compensat° des NLs et de la dispersion.

↳ effet des NLs : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

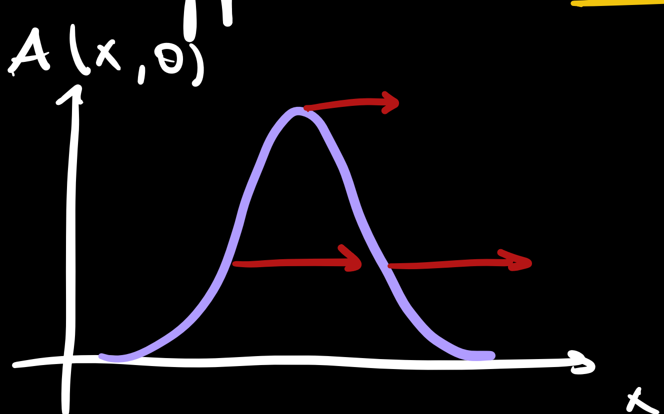
$\Rightarrow$ pendule grands angles : sa période est donnée par la formule de Borda

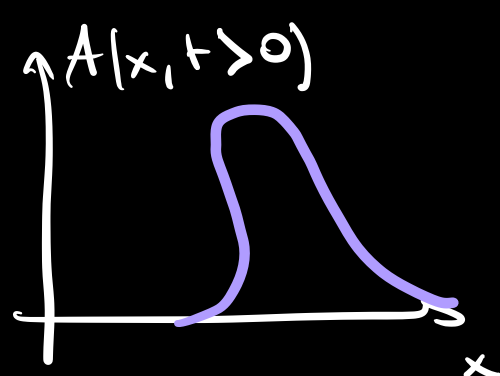
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$ où θ_0 : amplitude angulaire max. du pendule.

↳ $\omega_{NL} = \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\theta_0^2}{16}} = \omega_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.

$\Rightarrow \omega_{NL} \searrow$ qd $\theta_0 \nearrow$

$\Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega_{NL}}{k} \searrow$ qd $\theta_0 \nearrow$: on retrouve l'effet de raidissem^t par les NLs.





- On peut ici aussi déf. 1 tps de raidissement typiq :

$$\boxed{\tau_r = \frac{2\pi}{\frac{\omega_0\theta_0^2}{16}} = \frac{16T_0}{\theta_0^2} \sim \frac{1}{\theta_0^2}}$$

qui varie comme l'inverse de l'énergie injectée.

- Pour avoir compensation des NLs par la dispersion, il faut que $\tau_r \lesssim \tau_e$, ce qui impose 1 énergie minimale pour voir 1 soliton.

- Par la suite, on pose $\begin{cases} \xi = x - vt \\ \tau = t \end{cases}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \tau} - v\dfrac{\partial}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2v\dfrac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + v^2\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} - 2v\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\tau} + (v^2-c^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0.$$

On cherche 1 sol° $\boxed{\theta(\xi,\tau) = \theta(\xi)}$ ne dépendant q̄ de ξ, traduisant la propagaᵒ d'1 onde solitaire à la célérité v

↳ $$(v^2-c^2)\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{\omega_0^2}{v^2-c^2}\sin\theta = 0.$$

→ on trouve l'eqn d'1 pendule grands angles.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 - \frac{\omega_0^2}{v^2-c^2}\cos\theta = A$$

. Qd $\xi \to \pm\infty$, on veut q̄ $\begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \end{cases}$

↳ $$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{v^2-c^2}(\cos\theta - 1)$$

$\Rightarrow$ on a alors $v^2 - c^2 < 0 \iff |v| < c$

et ds ce cas, on peut chercher 1 sol° monotone :

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \pm\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{c^2-v^2}(1-\cos\theta)}$$

$$= \pm \frac{2\omega_0}{\sqrt{c^2-v^2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{\sin(\theta/2)} = \pm \frac{2\omega_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d\xi$$

$$\frac{d\theta}{\sin(\theta/2)} = \pm 2\gamma\frac{\omega_0}{c} d\xi \quad \text{où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

On intègre & on obtient :

$$2\ln\tan(\theta/4) = \pm 2\gamma\frac{\omega_0}{c}\xi + \text{cste}.$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{4}\right) = A e^{\pm\gamma\frac{\omega_0}{c}\xi} = e^{\pm\gamma\frac{\omega_0}{c}(\xi - X_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(x,t) = 4\arctan\left[e^{\pm\gamma\frac{\omega_0}{c}(x-x_0-vt)}\right]}$$

+ : kink

− : antikink

Pour 1 kink :

$$\begin{cases} \theta(x\to-\infty, t) = 0 \\ \theta(x\to+\infty, t) = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi \end{cases}$$

=> cela correspond donc à l'tour complet des pendules.

c) Vague solitaire en eau peu profonde

- Fluide en écoulem^t parfait, incompressible, irrotationnel, en eau peu profonde & en négligeant les effets capillaires : eqn de Korteweg de Vries.

2) Dispersion par les CLs

- Nous verrons cela ds le chap. suivant sur le guidage des ondes.