Biblio :

→ H prépa Ondes 2ème année

→ Physiq PC-PC* Tout en un

→ Classical Electrodynamics, Jackson

→ Mathématiq pour la φ & les φciens, W. Appel

→ La φ par la pratiq, Barthès & Portelli

→ Ondes, cours de φ de Berkeley

→ Fluid Mechanics, Landau et Lifschitz

→ BUP 649, Lahaye

→ BUP 438, Guinier

→ BUP 692, Bousquet et Viossat

→ BUP 742, Moreau

→ BUP 1035, Choimet

→ Optiq φ, Richard Taillet

→ φ des solitons, Dauxois et Peyrard

Chapitre I : GENERALITES SUR LES ONDES

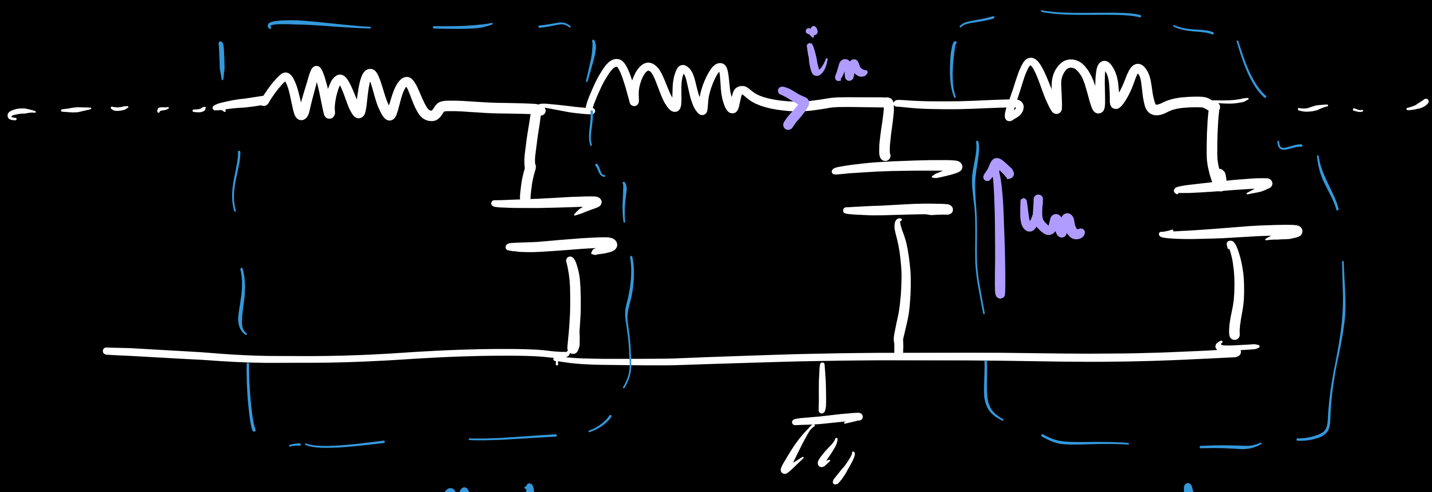
I. DESCRIPTION DES PHENOMENES ONDULATOIRES

1) Des oscillateurs à l'onde

a) Descript°

- On va partir de ce qu'on connaît, à savoir des oscillateurs en une dimension, et on va voir comment construire 1 descript° ondulatoire ds la limite continue.

- Ici, on veut décrire la propagat° d'1 courant ds 1 câble coaxial. Pour cela, nous allons considérer 1 modèle à constantes réparties avec 1 succession d'oscillateurs LC.

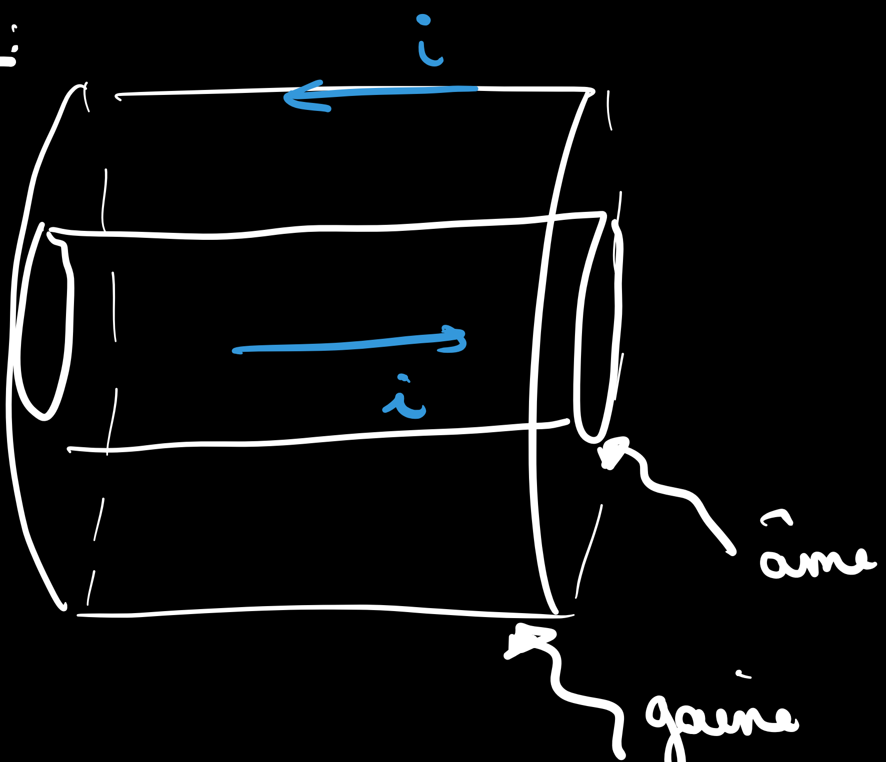


u_n : tension en sortie du $n^{\text{ème}}$ filtre LC

i_n : courant en entrée

OS q̄ toutes les capacités sont =, idem pour les inductances

• Motivat° :



↳ 2 conducteurs séparés par 1 isolant : effet capacitif

↳ courant variable : effet inductif

↳ capacités en // et bobines en série car ces effets doivent s'ajouter.

↳ on néglige la dissipat° par effet Joule ds les conducteurs : pas de résistance en série

↳ on néglige la résistance de fuite dû au caractère non réel de l'isolant : pas de résistance en //.

↳ régime HF

↳ OS qu'on peut appliquer localem^t l'ARQS magnétiq̄ m̂ si on veut décrire 1 phénomène de propagaθ : $a \ll c/f$

- <u>loi des mailles</u> : $u_{n-1} = u_n + L\frac{di_n}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{u_n - u_{n-1} = -L\frac{di_n}{dt}}$$

- <u>loi des noeuds</u> : $i_n = i_{n+1} + C\frac{du_n}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{i_{n+1} - i_n = -C\frac{du_n}{dt}}$$

b) Approx. cont

- <u>Approx. continue</u> : OS q̄ la distance a entre circuits est ≪ devant la distance caractéristiq̄ du phénomène de propagaθ λ (cf ⊕ loin) ⇒ coïncide avec la conditiθ d'ARQS.
⇔ le tps de propagaθ entre 2 circuits est ≪ devant le tps caractéristiq̄ du phénomène de propagaθ.
- OS aussi qu'on a 1 <u>syst. ouvert</u> (même cas d'oscillateur)
- Dans ce cas, on peut considérer q̄ u_{n-1}, u_n, u_{n+1} sont proches et on peut déf. 1 chp cont $u(x,t)$ t.q. $u_n = u(na,t)$.
+ idem pour i.
- Les 2 eqns précédentes se réécrivent :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{L}{a}\dfrac{\partial i}{\partial t} = -\Lambda\dfrac{\partial i}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial x} = -\dfrac{C}{a}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}}$$

où on a déf. Λ et Γ l'inductance et la capacité du câble coax. par unité de longueur.

- On obtient donc 2 eqns couplées qui lient les dérivées temporelles premières d'1 variable aux dérivées premières spatiales de l'autre variable.
- On peut, en les combinant, obtenir 1 eqn sur 1 seule variable, mais qui fait intervenir les dérivées d'ordre 2 partielles de tps & d'espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

↳ $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$ - idem pour i

avec $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$

↳ eqn de D'Alembert ou EOC

c) Energie transportée

- En combinant les 2 eqns, on peut aussi trouver

$\bar{q}$: $\Gamma u \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda i \frac{\partial i}{\partial t} = - u\frac{\partial i}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial x}$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(ui)$$

énergie stockée par effet capa

↳ $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}(ui) = 0}$

énergie stockée par effet inductif

- On retrouve la conservao de l'énergie eqn avec

$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E} = \frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2 \\ \Pi = ui \end{array}}$: densité d'énergie ; : puissance transportée

2) Onde à partir d'1 eqn CONT

a) Descripθ

Rq : on pourrait aussi traiter l'eq ds le vide.

- On veut maintenant décrire les ondes acoustiq ds 1 fluide.
- PBM complexe : → variables $\vec{v}, \rho, T, p$
  → eqns : NS, incompressibilité, 1ᵉʳ ppe de la Td
  ⇒ il manq 1 eqn (eqn d'état ou relaθ constitutive du fluide)
- On va se placer ds le cas de l'approx. acoustiq pour décrire ce PBM.

① OS qu'on peut décrire le fluide comme 1 milieu CONT, i.e. l'onde ne voit pas le détail des constituants, notamm^t leur mvt individuel

↳ $\lambda \gg l_{pm}$ ⇒ $\boxed{f \ll \frac{c}{l_{pm}}}$

OdG : $c = 340\,m/s$

$l_{pm} \simeq \frac{1}{n\sigma} \simeq \frac{k_B T}{\pi d^2 p} \simeq 0.1\,\mu m$ ⟹ $f \ll 3\,GHz$

gaz de sphères ∅ interacθ + néglige l'effet de covolume

densité

secθ efficace de collisions

Tamb
pamb

⇒ OK pour l'audible [20 Hz, 20 kHz] ds des CNTP.

→ on va pouvoir considérer des part. de fluide de taille mésoscopiq ℓ t.q. $\boxed{l_{pm} \ll \ell \ll \lambda}$.

(2) On étudie le fluide ds 1 réf. galiléen ds lequel le fluide est au repos !

(3) On néglige l'influence de la pesanteur

(4) On se place à l'éq. Δd local (ETL) de sorte qu'on peut déf. à chq instant des grandeurs Δd locales (T, etc.) et t.q la pression dynamiq = la pression Δd.

↳ cela revient à dire q le tps τ_μ de relaxaƟ interne ds la part. de fluide est ≪ devant la période T de l'onde.

↳ on va pouvoir lisser les grandeurs ds le tps sur 1 échelle τ t.q $\boxed{\tau_\mu \ll \tau \ll T}$.

(5) OS q l'évoluƟ des part. de fluide est isentropiq, i.e. adiabatiq & rév., et en part. quasi-statiq

↳ OK pour QS (voir pt précédent)

↳ pour q ce soit adiabatiq, il faut négliger les échanges Δ par diffusion entre part. de fluide, ce qui revient à considérer q le tps de diffusion sur 1 échelle de l'ordre de λ est ≫ devant

la période de l'onde.
(pas de convecᵒ car on va étudier 1 phénomène ondulatoire, qui comme on le verra ⊕ tard ne correspond à ∅ transport macro de matière).

↳ $\frac{d^2}{D} \gg T \iff \frac{cd}{D} \gg 1$

$\iff d \gg \frac{D}{c}$ ou

$$\boxed{f \ll \frac{c^2}{D}}$$

<u>OdG</u> : $D = 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
↳ $f \ll 10^{10}\ Hz$

↳ pour q̄ ce soit rév., il faut négliger toutes les sources d'irrév. : diffusion Δ (déjà vu), diffusion de qté de mvt (viscosité)

↳ $\frac{d^2}{\nu} \gg T \iff \boxed{f \ll \frac{c^2}{\nu}}$

avec ν : viscosité cinématiq

<u>OdG</u> : comme la diffusion Δ.

⑥ On envisage de petites perturbatᵒ autour de l'état de repos : on pourra linéariser les eqns.

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r},t) \text{ avec } |\vec{v}| \ll c \\ P(\vec{r},t) = P_0 + p(\vec{r},t) \quad |p| \ll P_0 \\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \mu(\vec{r},t) \quad |\mu| \ll \rho_0 \end{cases}$$

surpression acoustiq

- Rq : en fait 1 approx BF.

b) Mise en eqn

- $$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \\ \rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla} P \end{cases}$$

- Ordre 0 : $$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} P_0 = \vec{0} \end{cases}$$

- Ordre 1 : $$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0\vec{v}) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \end{cases}$$

- Il faut maintenant relier p à μ à partir de la compressibilité isentropiq :

$$\chi_s = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_s = -\rho \frac{\partial(1/\rho)}{\partial p}\Big|_s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_s$$

Si en fait IDL au premier ordre alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\partial \mu}{\partial p} \approx \frac{\mu}{p} \text{ car } \mu = 0 \text{ qd } p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \rho_0 \chi_s p$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ on retrouve les 2 eqns qui lient dérivées temp. & spatiales des variables couplées.

- On peut là encore combiner les 2 eqns pour obtenir 1 eqn pour chq variable seule :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \vec{\nabla} p}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 \chi_s} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0 \chi_s} \left(\Delta \vec{v} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right)$$

or $\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ car $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ (état de repos)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \vec{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$$

• On trouve pareil pour p : $\rightarrow$ EOC ou éqn de D'Alembert !

c) Energie transportée

• L'énergie totale d'1 élém^t δV_i de volume est la Σ des énergies cinétiq^{q}, potentielle et interne :

$$\delta E = \delta E_c + \underbrace{\cancel{\delta E_p}}_{=0} + \delta U = \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 \delta V_i + \delta U$$

• Identité Δd pour 1 transfo rév.

$$d\delta U = -P d\delta V$$ ⚠ $d \neq \delta$

d : variat^{o} ossiale ; δ : qté petite

où la part. de fluide passe de $(\delta V, P) = (\delta V_i, P_0)$ à $(\delta V, P) = (\delta V_f, P_0 + p)$ du fait du passage de l'onde.

Donc $\delta U = \delta U_i - \int_{\delta V_i}^{\delta V} P(\delta V') d\delta V'$

Or $P = P_0 + p$ et $\chi_s = -\frac{1}{\delta V} \frac{\partial \delta V}{\partial P}$

$$\Rightarrow \delta V' \simeq \delta V_i (1 - \chi_s p')$$

Donc $d\delta V' = -\delta V_i \chi_s dp'$

$$\Rightarrow \delta U = \delta U_i + P_0[\delta V - \delta V_i] + \int_0^p \delta V_i \chi_s p' dp'$$

$$\delta U = \delta U_i - P_0[\delta V_j - \delta V_i] - \frac{1}{2}\delta V_i \chi_s p^2$$

$$\hookrightarrow \frac{\delta E}{\delta V_i} = \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \frac{\delta U_i}{\delta V_i} + P_0 \chi_s p + \frac{1}{2}\chi_s p^2$$

<u>DONC</u> pour 1 vol. qcq$\mathcal{V}$, on a :

$$E = \iiint_{\mathcal{V}} dV \left\{ \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + P_0 \chi_s p + \frac{1}{2}\chi_s p^2 \right\} + \text{cste}$$

- On doit maintenant décrire comment varie cette énergie au cours du tps. Pour cela, on appliq le 1er ppe de la Δd en évolu° QS rév. adiabatiq :

$$dE = \delta W_p = -\oint\!\!\oint p\, \vec{v}\cdot d\vec{S}\, dt$$

$$\hookrightarrow \frac{dE}{dt} = -\oint\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} P\vec{v}\cdot d\vec{S} = -P_0 \oint\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{v}\cdot d\vec{S} - \oint\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} p\, \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Or $\displaystyle \oint\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{v}\cdot d\vec{S} \underset{\text{Th. de Green Ostrogradski}}{=} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dV = -\frac{1}{\rho_0}\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} dV = -\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \chi_s p\, dV$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} dV \left\{ \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2 \right\} + \oint\!\!\oint_{\partial\mathcal{V}} p\, \vec{v}\cdot d\vec{S} = 0}$$

→ bilan global d'énergie

- Cette relation se réécrit localement sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0}$$

énergie de compression

où $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2$: densité vol. d'énergie

$\vec{\Pi} = p \vec{v}$: puissance transportée (vecteur de Poynting acoustique)

énergie cinétique

RQ : Parfois, on parle d'énergie potentielle de compression par analogie avec les chaînes de ressorts ou de pistons.

RQ2 : On aurait pu retrouver ce résultat par l'analogie élec / méca :

$\begin{cases} u \leftrightarrow p \\ i \leftrightarrow \vec{v} \end{cases}$ + en regardant les relations de couplage $\begin{cases} \Lambda \leftrightarrow \rho_0 \\ \Gamma \leftrightarrow \chi_s \end{cases}$

3) Généralités sur les ondes

a) Déf. d'un phénomène ondulatoire

- On résume les pptés mises en évidence à partir des exples précédents.

① C'est la propagaᵒ d'1 perturbaᵒ de proche en proche avec transport d'énergie et sans transport macro. de matière.

② Il s'agit du couplage de l'oscillaᵒ d'au ⊖ 2 grandeurs Ⴔ représentées par des chps (scalaires ou vectoriels, i.e. des fᵒ de l'espace & du tps).

③ Ce couplage se traduit par l'existence de plusieurs eqns reliant les dérivées partielles des grandeurs couplées.

④ En combinant les eqns de couplage, on obtient deux edp pour chq variable qui couplent les dérivées d'espace & de tps : on parle d'eqn d'onde. Cette eqn d'onde dépend du phénomène vibratoire considéré (acoustiq, em, élasticité, etc.), ainsi q̄ du milieu de propagaᵒ.

⑤ La densité vol. d'énergie transportée est la Σ de termes quadratiq en les grandeurs couplées.

⑥ La puissance transportée par unité de sur face (vecteur de Poynting) est prop. au produit des grandeurs couplées.

RQ : les faits ① - ④ sont valables pour tous les phénomènes ondulatoires. Par contre, les points ⑤ et ⑥ ne sont valables q̄ pour certaines équations d'onde (ex : D'Alembert, télégraphistes)

RQ 2 : Est-ce q̄ l'eqn de la chaleur est l eqn d'onde ?

↳ pas de réponse absolue mais en tt cas, elle décrit le couplage entre $\vec{j_Q}$ et ΔT

RQ 3 : ① → cela interdit de définir l écoulem^t dirigé comme l onde.
Par contre, cela pose le PBM de l'eqn. de Schrödinger. Il s'agit donc de la déf. classiq̄ d'l onde.

b) Caractéristiq̄ d'l onde

- On peut définir l certain nbre de caractéristiq̄ d'l onde.

- Onde scalaire / vectorielle : on parle d'onde scalaire qd les grandeurs transportées sont scalaires. Sinon, on parle d'onde vectorielle.

- **Onde longitudinale / transverse** : * on parle d'onde longitudinale qd la vibrat° / perturbat° se fait // à la direct° de propagat° de l'onde.

  ex : ondes de compression ds 1 fluide

  * on parle d'onde transverse qd la vibrat° se fait ⊥ à la direct° de propagat°

  ex : ondes électrocinétiq ds le câble coax.

  * il existe aussi des cas hybrides.

- **Surface d'onde** : il s'agit d'1 surface CONT (∅ trous) de l'espace où l'état vibratoire est le m̄ en tt pt à 1 instant t donné.

  ex : * plans d'onde ⊥ à la direct° de propagat° → onde plane

  * sphères concentriq → onde sphériq

Rq : * Cela diffère de la déf. donnée en optiq des surfaces d'onde qui sont des surfaces équi-phases.

* Cette déf. n'est pas parfaite car elle ne décrit pas 1 surface ds le cas g^{al}, mais une courbe.

Ls 2 eqns pour l'amplitude & la phase

II. ONDES PROGRESSIVES DANS DES MILIEUX SIMPLES

1) Pptés de l'EOC

• Pour des phénomènes vibratoires classiq ds des milieux simples, les grandeurs oscillantes vérifient l'eqn de D'Alembert ou EOC :

$$\boxed{\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0}$$

• Pptés: ① C'est 1 eqn linéaire : on peut donc utiliser le ppe de superpositiO & l'analyse harmoniq.

② Elle est invariante par la transfo. $t \to -t$: traduit

1 phénomène rév. (∅ de dissipa°)

③ Elle est invariante par transla° ds l'espace $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{d}$: traduit 1 milieu homogène.

④ Elle est invariante par rota° de l'espace $\vec{x} \to R\vec{x}$ où R est 1 matrice de rota° de $SO(3)$: traduit 1 milieu isotrope.

(en effet si $\vec{x}' = R\vec{x}$ avec $R^{-1} = {}^tR$ alors

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \underset{\substack{\text{formule}\\ \text{de la chaîne}}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = R_{ij}\frac{\partial}{\partial_j} \quad \text{car } x'_i = R_{ij}x_j \iff x_i = R_{ji}x'_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_i} = \underbrace{R_{ij}R_{ik}}_{\underbrace{R_{ij}({}^tR)_{ki}}_{\delta_{jk}}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j})$$

⑤ Elle est invariante par translao ds le tps $t \to t + \tau$: cela traduit 1 milieu qui ne vieillit pas.

⑥ Elle n'est pas invariante par transformation de Galilée

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

↳ pour les ondes acoustiq, etc., cela traduit l'existence d'1 réf. privilégié, celui où le milieu de propagation est globalement au repos

↳ pour les ondes em, cela traduit le fait que l'em est 1 théorie relativiste.

(en effet à 1D $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \underbrace{\dfrac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} + \dfrac{\partial}{\partial t'} \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial t'}{\partial x}}}_{=0}$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}$$

et $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \underbrace{\dfrac{\partial x'}{\partial t}}_{=-v} + \dfrac{\partial}{\partial t'} \underbrace{\dfrac{\partial t'}{\partial t}}_{=1}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\Big(\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}\Big)$$

7) Elle est invariante par transfo. de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta c t) \\ t' = \gamma\left(t - \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases} \qquad \beta = \frac{v}{c} < 1 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ls cf pt précédent.

(En effet, à 1D

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\beta\gamma}{c}\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= -\gamma\beta c \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} \cancel{- 2\gamma^2 \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial t'}}$$

$$+ \beta^2 \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} - \gamma^2\beta^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}$$

$$\cancel{+ 2\gamma^2 \frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial t'}} - \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}(1-\beta^2)\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}$$

$$= \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} \quad \left(\text{car } \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\right)$$

8 EDP hyperboliq : permet d'utiliser

la méthode des caractéristiq pour la résoudre.

Rq : Cas de l'eqn de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$

↳ on a tjs l'invariance par translatⁿ & rotatⁿ de l'espace, mais la transformatⁿ par renversemᵗ du tps ne laisse plus invariante l'eqn d'onde : cela traduit l'irréversibilité du processus de diffusion ⚠

Rq 2 : Eqn de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$

↳ si $t \to t' = -t$ alors $-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t'} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$

↳ $i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t'} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi^* + V\Psi^*$

et cela revient à changer Ψ en Ψ^*, laissant inchangée la distributⁿ de proba $\rho = |\Psi|^2$

→ l'eqn de Schrödinger décrit 1 processus rev. (évolutⁿ d'1 part. massive ds 1 chp d'énergie potentielle).

2) Ondes planes

a) Cas gal

• On commence par chercher des solᵒ en

ondes planes, i.e., dont l'état vibratoire ne dépend q. de la coordonnée normale aux plans: $A(x,t)$.

- On doit résoudre: $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$,

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)A = 0$$

(méthode des caractéristiq. pour la résolut° d'1 EDP).

- Cela suggère de déf. 2 variables auxiliaires ξ et η t.q.

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad \text{et} \quad A(\xi,\eta) = A(x,t)$$

- Alors $\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial A}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial \xi} + \dfrac{\partial A}{\partial \eta}$

et $\dfrac{\partial A}{\partial t} = c\left[\dfrac{\partial A}{\partial \eta} - \dfrac{\partial A}{\partial \xi}\right]$

DONC $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial A}{\partial x}\right)$

$$= \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$$

et $\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2\left[\dfrac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} - 2\dfrac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}\right]$

DONC A est sol. ssi $\boxed{\dfrac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = 0}$

↳ Cela s'intègre 1 première fois :

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = f(\xi) \text{ où } f \text{ est } 1 \text{ f° qcq}$$

puis 1 seconde fois :

$A(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ où F est 1 primitive de f et G 1 f° qcq.

· CCL : Toute sol° en onde plane de l'eqn de D'Alembert (et à fortiori en 1 seule dim. d'espace) s'écrit sous la forme :

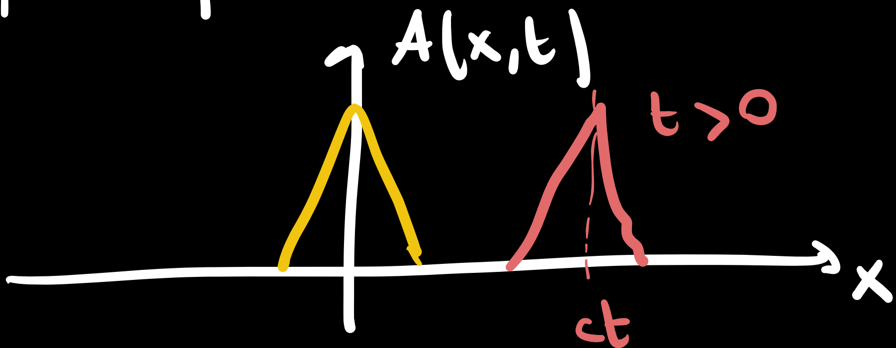
$$A(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

où F, G sont des f° qcqs.

$F(x-ct)$: onde plane progressive (OPP^+)

$G(x+ct)$: onde plane regressive (OPP^-)

• Interpréta° φ : * Pour l'OPP^+, l'état vibratoire ne dépend q de $x-ct$. DONC :



→ cela traduit l propaga° ∅ déforma° de l'onde à la célérité c ds le sens des x ↗

* Pour l'OPP^-, la propaga° se fait ds le sens des x ↘.

• RQ : les $OPP^{\pm}$ sont la traduc° φ de la méthode des caractéristiq en mathématiq pour résoudre l EDP.

b) Ondes planes progressives sinusoïdales

• On s'intéresse maintenant à l CP d'OPP t.q la dépendance en $x \pm ct$ est sinusoïdale

La OPPS ⊄ OPPH ⊄ OPPM

$$\boxed{A(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

amplitude — pulsat° — vecteur d'onde — φ à l'origine

où $\boxed{\frac{\omega}{k} = \pm c}$ OPP$^{\pm}$ ⚠ à priori 2 branches

· Commentaires : 1) On peut également préférer la notat° complexe

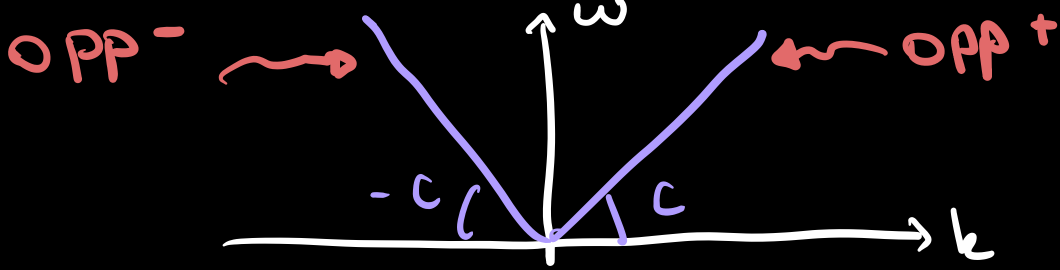
$$\boxed{\underline{A}(x,t) = \underline{A_0}\, e^{i(\omega t - kx)}} \quad (2A = \underline{A} + c.c.)$$

où $\underline{A_0} = A_0 e^{i\varphi}$

amplitude complexe — complexe conjugué

2) Considérer des OPPS est particulièrem^t utile ds le cas d'1 EDP linéaire car tte sol° peut alors s'écrire comme 1 superposit° d'OPPS sol° (TF) : il s'agit d'1 base de sol.

3) La relat° entre k & ω pour les OPPS s'appelle relat° de dispersion (cf chap. IV).



4) $\boxed{\dfrac{\omega}{k} = \pm c = v_\varphi}$: v_φ s'appelle la vitesse de φ (cf. chap II) et ne dépend pas de k ou ω : on dit q̄ la propagat° est non dispersive.

5) Les OPPS présent 1 double périodicité spatiale et temp :

- période spatiale $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{k}}$ (longueur d'onde)
- période temporelle $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$
- fréq. spatiale $\sigma = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{k}{2\pi}$ (nbre d'onde)
- fréq. temporelle $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

6) On peut tout généraliser à 3D, i.e.

$$\boxed{\begin{cases} A(\vec{r},t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) \\ \omega = |\vec{k}|\, c \iff \vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\,\vec{n} \end{cases}}$$ où

$\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire dans la dir° de propagat°.

c) Not° de paquet d'onde

- Nous avons obtenu 1 ens. de sol° propagative de l'EOC, à savoir les OPPS.

↳ Par linéarité, on peut chercher tte sol° de l'eqn d'onde sous la forme d'1 superposit° des OPPS sol° : on parle de paquet d'onde.

$$\boxed{A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, a(k)\, e^{i(\omega(k)t - kx)} \quad \text{où } \omega(k) = kc}$$

" interférences d'1 multitude d'OPPS$^{\pm}$ "

La condit° $A(x,t)$ réel est facilem^t obtenue en prenant $a(k)$ à sym. hermitienne, i.e.

$$\boxed{a(-k) = a(k)^*}$$ c.c.

- Motivat°: 1 OPPS est 1 onde extension spatiale & temporelle ∞ ; son énergie intégrée sur tout l'espace est donc ∞.

↳ les signaux φ ont 1 énergie finie ⇒ donc 1 extension spatiale & temporelle finies.

2) Pourquoi ne pas avoir fait 1 superpositio discrète d'OPPS ? Tout simplem^t car cela donne encore 1 signal d'extension spatiale ∞.

• <u>CCL</u>: Un paquet d'onde est 1 signal φ localisé ds le tps & ds l'espace et obtenu par 1 superpositio <u>CONT</u> d'OPPS.

↳ En effet, si on Σ des OPPS

$$A_m(x,t) = A_0 \cos(\omega_m t - k_m x)$$

où $\omega_m = \omega_0 + m\delta\omega$ et $k_m = \frac{\omega_m}{c} = k_0 + m\delta k$

[Code Python

En particulier, on voit q̄ le signal est tjs d'extension spatiale ou temp. ∞. On

voit des "burst" dont la largeur est prop. à $\frac{1}{N\delta\omega}$ et dont la périodicité est donnée par $1/\delta\omega$ (cf formule des réseaux)

• Mathématiquem^t :

$$\underline{A}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} A_0\, e^{i(\omega_n t - k_n x)}$$

$$= A_0\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \sum_{n=0}^{N} e^{in(\delta\omega t - \delta k x)}$$

$$= A_0\, e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}\, \frac{1 - e^{i(N+1)(\delta\omega t - \delta k x)}}{1 - e^{i(\delta\omega t - \delta k x)}}$$

$$\underline{A}(x,t) = A_0\, e^{i\left(\omega_0 + \frac{N}{2}\delta\omega\right)(t - x/c)}\, \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\delta\omega(t - x/c)\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega}{2}(t - x/c)\right)}$$

La période de l'amplitude est alors $\lambda = \dfrac{\pi}{\frac{\delta\omega}{2c}}$ soit $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\delta\omega} = \dfrac{2\pi}{\delta k}$ et la largeur des burst est $\Delta x \simeq \dfrac{\pi}{(N+1)\delta\omega/2c} = \dfrac{2\pi c}{(N+1)\delta\omega} = \dfrac{2\pi}{(N+1)\delta k}$

⇒ Pour avoir 1 paquet d'onde, il faut 1 onde non périodiq̄ et d'extension spatiale $< \infty$, ce qui impose

$$\begin{cases} \delta\omega \to 0 \\ N\delta\omega < \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta\omega \to 0 \\ N \to +\infty \end{cases}$$

On doit donc superposer 1 qté d'OPPS ($N \to +\infty$) dont la pulsation varie cont$^{\underline{T}}$ ($\delta\omega \to 0$).

- On obtient également que ds ce cas, on a :

$$\Delta x \propto \frac{1}{(N+1)\delta k} \propto \frac{1}{\Delta k}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\begin{cases} \Delta x \Delta k \simeq 1 \\ \Delta t \Delta \omega \simeq 1 \end{cases}}$$

⊕ 1 paquet d'onde est localisé, ⊕ il a 1 spectre large.

- Enoncé rigoureux du "ppe d'indétermination de Heisenberg" :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x \Delta k &\geq \frac{1}{2} \\ \Delta t \Delta \omega &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

où $\Delta k^2 = [k^2] - [k]^2$ avec

$$[k^2] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 |a(k)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |a(k)|^2}$$

et $$[k] = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k |a(k)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |a(k)|^2}$$

et pareillem^t pour X.

- la f° $a(k)$ est alors déterminée par les CIs, i.e. par $A(x,0)$.

↳ $A(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-ikx}$

ou encore $\boxed{a(k) = TF[A(x,0)]}$

- De ⊕, en utilisant le fait q̄ $\omega(k) = |k|c$, on trouve : $A(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(ct-x)}$

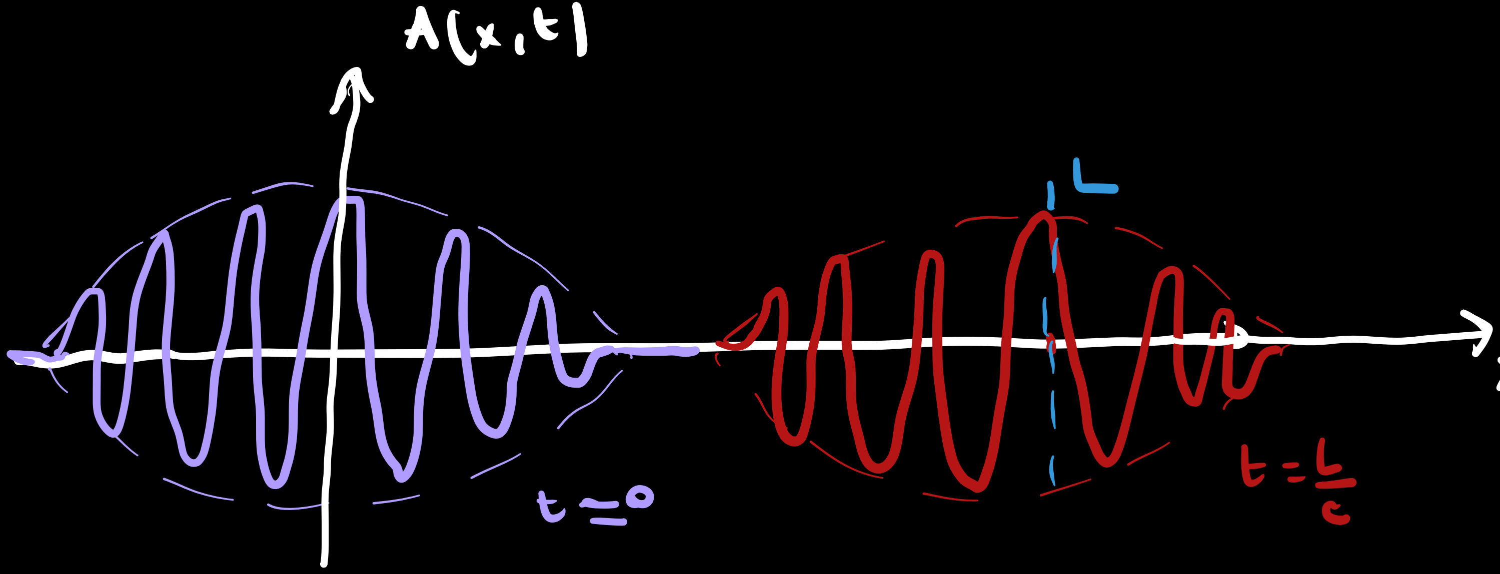
$$+ \int_{-\infty}^{0} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-ik(ct+x)}$$

ou encore

$$A(x,t) = \underbrace{A_+(x-ct)}_{\text{OPP}^+} + \underbrace{A_-(x+ct)}_{\text{OPP}^-}$$

qui se propage ∅ se déformer (idem)

- On retrouve le résultat énoncé ⊕ haut sur les sol° de l'eqn de D'Alembert.



3) Ondes sphériq.

- On peut égalem^t chercher des sol° en ondes sphériq., i.e. t.q $A(\vec{r},t) = A(r,t)$ en coordonnées sphériq.
- Cela revient à résoudre l'eqn :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rA) = 0}$$

- On est alors ramené au cas précédent.
- CCL : Toute sol° en onde sphériq de l'eqn de D'Alembert s'écrit sous la forme :

$$\boxed{A(r,t) = \frac{F(r-ct)}{r} + \frac{G(r+ct)}{r}}$$

onde sphériq dv ou sortante

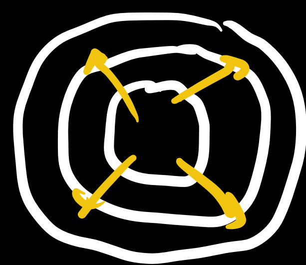
onde sphériq cv ou rentrante

• **RQ** : $r=0$ est appelé le foyer de l'onde (ex : source ponctuelle en optiq̄ ou en acoustiq̄).

• **RQ2** : L'amplitude de l'onde div en $r=0$

↳ très souvent la descrip° linéaire en termes ondulatoires cesse d'ê correcte proche de l'origine (rassurant).

• **RQ3** : Il n'existe pas de direct° de propaga°.



↳ on ne peut parler d'onde progressive/ regressive.

• **RQ4** : L'amplitude de l'onde ↘ qd r ↗ : on dit qu'il y atténua°. Cependant, cela n'est pas synonyme d'amortissement, i.e. de perte d'énergie. Ici l'atténua° est 1CSQ de la conserva° de l'énergie et de sa distribu° sur des surfaces d'ondes de ⊕ en ⊕ grandes.

↳ en effet l'énergie ds 1 coquille entre 2 surfaces d'onde ≈ proches vaut :

$$E \propto dr \int d\theta\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, A(r,t)^2$$

$$\propto 4\pi [A(r,t) r]^2 dr$$

$\rightarrow$ cela impose $A \propto 1/r$.

4) Ondes cylindriq

- On cherche des sol° de l'eqn de D'Alembert dont les surfaces d'onde ont 1 sym. de révolut°, i.e. qui dépendent de ρ en coordonnées cylindriq.

  ↳ l'état vibratoire ne dépend alors q̄ de ρ: les surfaces d'onde sont alors des cylindres de révolut° coaxiaux.

- On peut construire les ondes cylindriq à partir des ondes sphériq, en notant q̄ $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, soit :

$$A(\rho,t) = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \left\{ F\left(\sqrt{\rho^2+z^2} - ct\right) + G\left(\sqrt{\rho^2+z^2} + ct\right) \right\}$$

sym $z \to -z$

On pose $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \Rightarrow dr = z\,dz/r$

$$\Rightarrow A(\rho,t) = \int_\rho^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} F(r-ct) + \int_\rho^{+\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} G(r+ct)$$

ou encore en posant $\xi = r \pm ct$:

$$\boxed{A(\rho,t) = \int_{\rho-ct}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+ct)^2-\rho^2}} F(\xi) + \int_{\rho+ct}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-ct)^2-\rho^2}} G(\xi).}$$

• Interprétat°: OS q̄ $G=0$ et q̄ $F(\xi)$ est $\neq 0$ ds l'intervalle $[\xi_1, \xi_2]$.

Alors
$$A(\rho,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho-ct > \xi_2 \\ \displaystyle\int_{\rho-ct}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-ct)^2-\rho^2}} F(\xi) & \text{si } \xi_1 < \rho-ct < \xi_2 \\ \displaystyle\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-ct)^2-\rho^2}} F(\xi) & \text{si } \rho-ct < \xi_1 \end{cases}$$

DONC à tps courts, i.e. si $t < \frac{\rho-\xi_2}{c}$ alors il n'y a pas de vibrat° à la distance radiale ρ. DONC ce terme correspond à l'onde cylindriq̄ sortante.

• De la m̂ manière, le terme $\int$ avec G correspond à l'onde cylindriq̄ entrante.

• Ptés: 1) Il n'y a pas de direct° de propagat°

2) Contrairem^t aux ondes planes ou sphériq̄, il y a

1 front avant MAIS pas de front arrière car

$$A(\rho,t) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2-\rho^2}} F(\xi)$$

$t > \frac{\rho-\xi_1}{c}$

$$\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{ct}\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi\, F(\xi)$$

$$\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

$A(\rho,t)$ ne s'annule pas en tps fini à ρ fixé.

3) À grandes distances devant λ, $A(\rho,t) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ pour assurer la conservaᵒ de l'énergie (de sorte q̄ $\rho A(\rho,t)^2 = \text{cste}$).

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

On cherche 1 solᵒ $A(\rho,t) = \frac{B(\rho,t)}{\sqrt{\rho}}$ qd $\rho \to +\infty$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial A}{\partial\rho}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial B}{\partial\rho}-\frac{B}{2\rho^{3/2}}$$

$$\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}=\sqrt{\rho}\frac{\partial B}{\partial\rho}-\frac{B}{2\sqrt{\rho}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right)=\sqrt{\rho}\frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}+\frac{B}{4\rho^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}+\frac{B}{4\rho^{5/2}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\frac{1}{\sqrt{\rho}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}+\frac{B}{4\rho^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=0.$$

À grandes distances, $\frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}\sim k^2 B \gg B/\rho^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial\rho^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}=0.$$

$$\Rightarrow A(\rho,t) = \frac{F(\rho+ct)}{\sqrt{\rho}} + \frac{G(\rho-ct)}{\sqrt{\rho}}$$

5) Relat° de structure & impédance propagative

a) Cas de grandeurs couplées scalaires

• 1er exple : OPP$^+$ ds 1 câble coax

$$i(x,t) = F(x-ct)$$

Alors $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c F'(x-ct)$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, F'(x-ct)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, F(x-ct) + \cancel{h(t)}$$

= 0 car perturbat° par rapport à l'état de repos

$$\Rightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, i(x,t)$$

ou encore $\boxed{u(x,t) = Z\, i(x,t)}$ avec

$$Z = \sqrt{\Lambda / \Gamma}$$

RQ: Pour 1 OPP$^-$, le m̂ raisonnem^t donne

$$u(x,t) = -Z\, i(x,t)$$

On peut alors réexprimer les relat° de couplage en f° de Z et c :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Gamma}\dfrac{\partial i}{\partial x} = -Zc\dfrac{\partial i}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{c}{Z}\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}}$$

· Généralisat° : 1) Ds le cas de la propagat° d'ondes ds 1 milieu simple impliquant le couplage de A_1 et A_2, les relat° de couplage ne dépendent q̄ 2 constantes Z et c qui sont f° du phénomène considéré et du milieu !

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial t} = -Zc\dfrac{\partial A_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial t} = -\dfrac{c}{Z}\dfrac{\partial A_1}{\partial x} \end{cases}}$$

c : célérité de l'onde
Z : impédance propagative

relat° de structure

2) Pour 1 $OPP^{\pm}$, $\boxed{A_1 = \pm Z A_2}$.

3) Ds le cas g^{al}, si $A_2 = F(x-ct) + G(x+ct)$ alors $A_1 = Z[F(x-ct) - G(x+ct)]$ et il n'y a plus de relat° de proportionnalité.

b) Cas d'1 grandeur vectorielle

• $2^{ème}$ exple : OPP^+ ds 1 fluide

$$p(x,t) = F(x-ct)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p = -\frac{1}{\rho_0}F'(x-ct)\vec{e_x}$$

$$\vec{v}(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c}F(x-ct)\vec{e_x} + \cancel{\vec{h}(x)}^{\vec{0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\chi_s}{\rho_0}}F(x-ct)\vec{e_x}$$

ou encore
$$\boxed{\begin{cases} p(x,t)\vec{e_x} = Z\vec{v}(x,t) \\ Z = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\chi_s}} \end{cases}}$$

· Généralisation : 1) Ds le cas de la propagation d'ondes ds 1 milieu simple impliquant le couplage de A_1 et $\vec{A_2}$, les relations de couplage ne dépendent que 2 constantes Z et c, qui sont f° du phénomène considéré et du milieu :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial t} = -Zc\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A_2} \\ \dfrac{\partial \vec{A_2}}{\partial t} = -\dfrac{c}{Z} \vec{\nabla} A_1 \end{cases}$$

c : célérité de l'onde

Z : impédance propagative

2) Pour 1 OPP+, $\boxed{A_1 \vec{n} = Z \vec{A_2}}$ où $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire ds la direction a le sens de propagation.

⚠ OPP− : $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$

3) Ds le cas général, il n'y a plus de relation de proportionnalité.

c) Cas de 2 grandeurs vectorielles

3ème exple : OEM ds le vide

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

On introduit alors l'excitat° magnétiq

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

↳ $\Delta\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$ relat° de couplage

$$= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

↳ $$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$ EOC

(et pareil pour $\vec{H}$)

OPP+ pour $\vec{H}$: $\vec{H}(x,t) = F(x-ct)\,\vec{e_z}$

(on a forcém^t l'onde transverse, de part l'eqn à la dr).

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times(F\vec{e_z}) = -\frac{F'(x-ct)}{\varepsilon_0}\vec{e_y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,t) = \frac{F(x-ct)}{c\varepsilon_0} + \cancel{\vec{E_0}(x)} = \vec{0}$$

soit $\boxed{\vec{E}(x,t) = Z\,\vec{H}(x,t) \times \vec{e_x}}$ où $\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega}$
(impédance propagative du vide)

· Généralisat° : 1) Ds le cas de la propagat° d'onde ds 1 milieu simple impliquant le couplage de $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$, les relat° de couplage ne dépendent q 2 constantes Z et c, qui sont f° du phénomène considéré et du milieu :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A_1}}{\partial t} = Zc\,\vec{\nabla} \times \vec{A_2} \\ \dfrac{\partial \vec{A_2}}{\partial t} = -\dfrac{c}{Z}\,\vec{\nabla} \times \vec{A_1} \end{cases}}$$

c : célérité de l'onde
Z : impédance propagative

2) Pour 1 OPP$^+$, $\boxed{\vec{A_1} = Z\,\vec{A_2} \times \vec{n}}$ où $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire ds la direct° a le sens de propagat°.

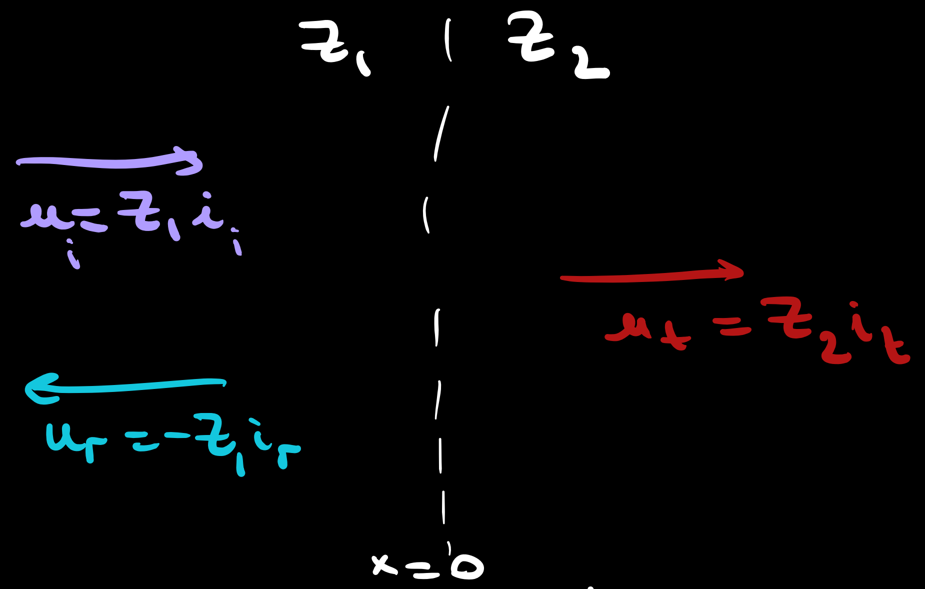
⚠ OPP$^-$: $\vec{n} \to -\vec{n}$

3) Ds le cas g^{al}, il n'y a plus de relat°

de proportionnalité.

6) Réflexion d'1 OPP

- 1 ppté importante des ondes est de pouvoir ê réfléchie et transmise à l'interface entre 2 milieux.
- On considère 2 milieux simples ≠ d'impédance propagatives Z_1 et Z_2.



- On envoi 1 OPP$^+$ (ex: câble coax. sur 1 résistance)
PBM: Comme $Z_2 \neq Z_1$, on ne peut à la fois vérifier la CONT des 2 grandeurs couplées à l'interface.
- Il doit donc exister 1 onde réfléchie OPP$^-$.
- On a alors: $\begin{cases} Z_2 i_t = Z_1 (i_i - i_r) \\ i_t = i_i + i_r \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Z_2 (i_i + i_r) = Z_1 (i_i - i_r)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} r = \dfrac{i_r}{i_i} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\[2ex] t = \dfrac{i_t}{i_i} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases}}$$

coeff. de réflexion en amplitude

coeff. de transmission en amplitude.

Pour la tension, on a :

$$\boxed{\begin{cases} r' = \dfrac{u_r}{u_i} = \dfrac{-Z_1 i_r}{Z_1 i_i} = -r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\[2ex] t' = \dfrac{u_t}{u_i} = \dfrac{Z_2 i_t}{Z_1 i_i} = \dfrac{Z_2}{Z_1} t = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases}}$$

RQ : valable pour tt type d'onde vérifiant l'EOC.

Généralisat° : Si $\boxed{A_1 = \pm Z A_2}$ pour 1OPP$^\pm$

$$\boxed{\text{alors} \begin{cases} \dfrac{A_{1,r}}{A_{1,i}} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \ ; \ \dfrac{A_{1,t}}{A_{1,i}} = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \\[2ex] \dfrac{A_{2,r}}{A_{2,i}} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \ ; \ \dfrac{A_{2,t}}{A_{2,i}} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases}}$$

Applicat° : 1) caractérisat° complète d'1 milieu par la mesure de la célérité et de son impédance.

La célérité : retard d'1 impulsion (car $\emptyset$ de dispersion, i.e. toutes les OPPS sont retardées de la m̂ manière)

La impédance : dispari° de l'onde réfléchie à l'aide d'1 impédance variable en sortie.

Manip : Mesure de c & Z pour 1 coax avec R terminale.

$$c \simeq 2.10^8 \text{ m/s} \quad ; \quad Z \simeq 50\,\Omega$$

2) Impédance de sortie du GBF $= 50\,\Omega$ pour éviter les réflexions vers le GBF à l'entrée du câble coaxial.

. On peut égalem^t définir des coeff. de réflexion et de transmission en puissance, i.e.

$$R = \frac{|\Pi_r|}{|\Pi_i|} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\Pi_t|}{|\Pi_i|}$$

En se rappelant q Π est prop. aux × des grandeurs couplées, on a :

$$\begin{cases} R = \left|\dfrac{A_{1,r}A_{2,r}}{A_{1,i}A_{2,i}}\right| = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = \left|\dfrac{A_{1,t}A_{2,t}}{A_{1,i}A_{2,i}}\right| = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \end{cases}$$

En part. on note $\bar{q}$ $\boxed{R+T=1}$ traduisant la conservat° de l'énergie.

- Adaptat° d'impédance : pour $\bar{q}$ la transmission d'énergie soit optimale, il faut $\bar{q}$ $T=1$ et $R=0$, soit $Z_1 = Z_2$ (on retrouve p.c. la condit° sur l'impédance du GBF).

7) Effet Doppler

- Il se manifeste qd l'émetteur & l'obs. sont en mvt. On observe alors 1 décalage de la pulsat° de l'onde entre 1 OPPS émise par l'émetteur E et celle reçue par l'obs. R.

$$A_E(\vec{r},t) = A_0 \cos(\omega_E t - \vec{k}_E \cdot \vec{r}) \text{ avec } \omega_E = |\vec{k}_E| c$$

⚠ Il existe 2 explicat° ≠ de l'effet Doppler, selon qu'il existe ou non 1 réf. privilégié pour la propagat° de l'onde, ou encore selon $\bar{q}$ l'onde peut se propager ds le vide ou non.

a) Existence d'1 réf. privilégié

- C'est le cas où l'onde ne peut pas se propager ds le vide, globalem^t cela concerne les ondes acoustiq. Il existe alors 1 réf. privilégié R_0, celui ds lequel le milieu de propagat° est globalem^t au repos.

- On doit alors repérer le mvt de E et R par rapport à R_0.

- On note $\vec{v_E}$ et $\vec{v_R}$ leur vitesse respective, supposées cste.

- On note $t=0$, l'instant où E passe par l'origine $\Rightarrow \vec{r_E}(t) = \vec{v_E}\, t$ et $\vec{r_R}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_R}\, t$.

- En 1 posit° $\vec{r}$, l'onde reçue à l'instant t a été émise par E à l'instant t_E t.q :

$$\vec{r} - c\,\vec{n}\,(t - t_E) = \vec{r_E}(t_E)$$ où $\vec{n}$ désigne la direct° de propagat° de l'OPPS

$$\Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n} - ct = \vec{r_E}(t_E)\cdot\vec{n} - ct_E$$

$$\Rightarrow t_E = \frac{ct - \vec{r}\cdot\vec{n}}{c - \vec{v_E}\cdot\vec{n}}$$

- Si on suit l'obs., alors il voit à l'instant t l'onde émise à l'instant :

$$t_E = \frac{ct - \vec{r_R}(t)\cdot\vec{n}}{c - \vec{v_E}\cdot\vec{n}} = \frac{c - \vec{v_R}\cdot\vec{n}}{c - \vec{v_E}\cdot\vec{n}}\,t - \frac{\vec{r_0}\cdot\vec{n}}{c - \vec{v_E}\cdot\vec{n}}$$

• Ainsi, si l'émetteur émet 1 OPPS
$A_E(\vec{r},t)=A_0\cos(\omega_E t-\vec{k}_E\cdot\vec{r})$, la vibration au niveau de l'émetteur est $A_E(\vec{0},t)=A_0\cos(\omega_E t)$, et l'obs. reçoit la vibration

$$A_R(t)=A_0\cos(\omega_E t_E)$$

$$A_R(t)=A_0\cos\left(\frac{c-\vec{v}_R\cdot\vec{n}}{c-\vec{v}_E\cdot\vec{n}}\,\omega_E t-\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{n}\,\omega_E}{c-\vec{v}_E\cdot\vec{n}}\right).$$

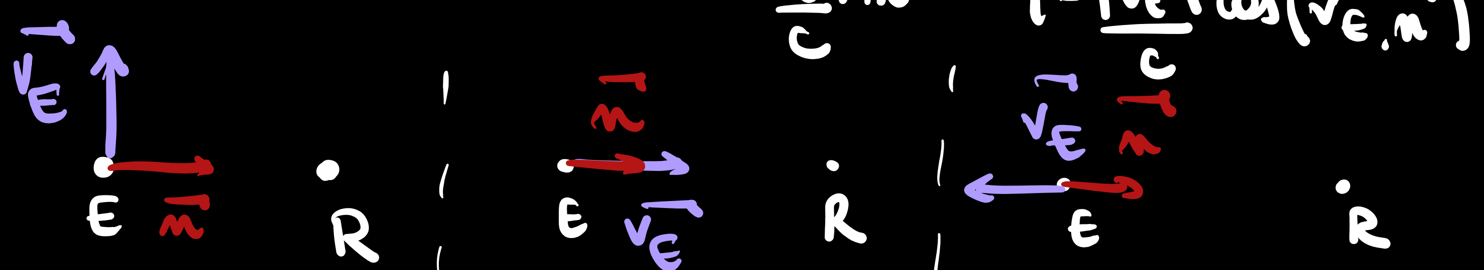
⇒ L'obs. voit 1 vibration (1 onde) de pulsation

$$\boxed{\omega_R=\frac{c-\vec{v}_R\cdot\vec{n}}{c-\vec{v}_E\cdot\vec{n}}\,\omega_E}$$

• RQ: L'émetteur & l'obs. ne peuvent pas se déplacer + vite que c, i.e. $|\vec{v}_R|<c$; $|\vec{v}_E|<c$. Sinon, on observe des ondes de choc dont les caractéristiques sont très ≠.

• On note que l'effet Doppler est anisotrope car dépend de $\vec{n}$.

Ex: $\vec{v}_R=\vec{0}$ $\quad \omega_R=\dfrac{\omega_E}{1-\frac{\vec{v}_E\cdot\vec{n}}{c}}=\dfrac{\omega_E}{1-\frac{|\vec{v}_E|}{c}\cos(\vec{v}_E,\vec{n})}$



$\omega_R=\omega_E$ | $\omega_R>\omega_E$ + aigu | $\omega_R<\omega_E$ + grave

- l'effet dépend de la direction du mvt de E et R séparément.

- Ds le cas où $|\vec{v_R}|, |\vec{v_E}| \ll c$ alors on obtient la relation approchée $\boxed{\omega_R \simeq \omega_E \left(1 + \frac{\vec{v_{E/R}} \cdot \vec{n}}{c}\right)}$, où $\vec{v_{E/R}} = \vec{v_E} - \vec{v_R}$

↳ Ds le cas général, ω_R dépend à la fois de $\vec{v_E}$ et $\vec{v_R}$ mais devient 1 f° de leur vitesse relative si les vitesses impliquées sont petites.

b) Propagation ds le vide

- Ds ce cas, il n'y a plus de réf. privilégié, et il faut obs. le mvt de E par rapport à R, i.e. en introduisant le réf. propre R' de R.
- Pour cela, on doit réaliser 1 transfo relativiste des vitesses (car rien ne limite les vitesses à devenir de l'ordre de la célérité de la lumière ds le vide).
- On note alors $\vec{v_{E/R}}$ la vitesse relative de E par rapport à R, et on note $\mathcal{R}$ le réf. propre de E.
- Transfo de Lorentz :

$$t = \frac{t' - v_{E/R}\, x'/c^2}{\sqrt{1 - v_{E/R}^2/c^2}} = \gamma\left(t' - \beta \frac{x'}{c}\right)$$

$$x = \frac{x' - v_{E/R}t'}{\sqrt{1 - v_{E/R}^2/c^2}} = \gamma(x' - \beta c t')$$

$$y = y' \ , \ z = z' \qquad \beta = \frac{v_{E/R}}{c} \ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

où ϕ perte de généralité, OS q $\vec{v}_{E/R} = v_{E/R}\,\vec{e_x}$.

. On a alors :

$$A(\vec{r},t) = A_0 \cos(\omega_E t - \vec{k_E}\cdot\vec{r})$$

$$= A_0 \cos\left[\gamma \omega_E \left(t' - \beta \frac{x'}{c}\right) - k_{E,x}\gamma(x' - \beta c t') - k_{E,y}y' - k_{E,z}z'\right]$$

$$A(\vec{r'},t') = A_0 \cos\left[\gamma(\omega_E + k_{E,x}\beta c)t' - \gamma\left(k_{E,x} + \frac{\beta \omega_E}{c}\right)x' - k_{E,y}y' - k_{E,z}z'\right]$$

soit au récepteur : $x' = y' = z' = 0$:

$$A(t') = A_0 \cos\left[\gamma \omega_E \left(1 + \frac{k_{E,x}}{\omega_E}\beta c\right)t'\right]$$

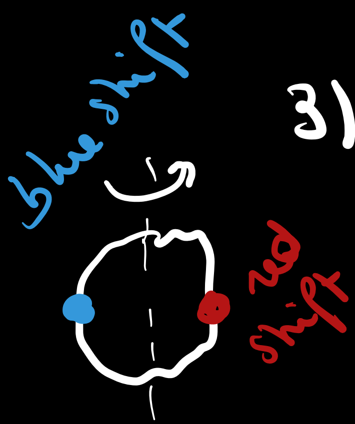
Or $k_{E,x} = \vec{k_E}\cdot\frac{\vec{v_{E/R}}}{||\vec{v_{E/R}}||} = \frac{\omega_E}{c}\,\frac{\vec{n}\cdot\vec{v_{E/R}}}{v_{E/R}}$

$$\Rightarrow \quad A(t') = A_0 \cos\left[\gamma \omega_E \left(1 + \frac{\vec{n}\cdot\vec{v_{E/R}}}{c}\right)t'\right]$$

. L'obs. voit donc l onde de pulsat° décalée

$$\boxed{\omega_R = \gamma\, \omega_E \left(1 + \frac{\vec{n}\cdot \vec{v}_{E/R}}{c} \right)}$$

• Ptés : 1) Tjs anisotrope.
2) Ne dépend q̄ de la vitesse relative $\hat{n}$ ds le cas gal.
3) Ds la limite NR, on trouve :



$$\boxed{\omega_R \simeq \omega_E \left(1 + \frac{\vec{n}\cdot \vec{v}_{E/R}}{c} \right)}$$ analogue au cas précédent.

Applicaº : Mesure de vitesses des étoiles, de véhicules, etc.

III. ONDES STATIONNAIRES

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des ondes ds des milieux ouverts ∞. Puis nous avons discuté ce qui passait à l'interface entre 2 milieux. Cela suggère d'étudier ⊕ en détails la propagaº des ondes ds 1 milieu fermé, ou encore du rôle des CLs sur la propagaº des ondes.

1) Définiº

• On appelle OS toute solº de l'eqn d'onde pour laquelle les variables d'espace & de tps sont découplées, i.e.,

$$\boxed{A(x,t) = f(x)g(t)}$$ où f & g sont des f° réelles

- Sa recherche se fait le ⊙ souvent en isolant ds l'eqn d'onde les dépendances spatiales & temp. de part & d'autre du signe =.

- Pour l'EOC, on a : $f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2}g''(t)f(x) = 0$

↳ $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \text{cte} = -\lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \\ g''(t) + \lambda c^2 g(t) = 0 \end{cases} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $\lambda < 0$, alors $g(t) = g_+ \cancel{e^{\sqrt{-\lambda}ct}} + g_- \cancel{e^{-\sqrt{-\lambda}ct}}$

éviter la dv   par réversibilité

Donc $\lambda > 0$ et on le note $\lambda = q^2$.

Alors $\begin{cases} f''(x) + q^2 f(x) = 0 \\ g''(t) + q^2c^2 g(t) = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} f(x) = f_0 \cos(qx + \varphi_x) \\ g(t) = g_0 \cos(qct + \varphi_t) \end{cases}$

et in fine $\boxed{\begin{array}{l} A(x,t) = A_0 \cos(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t) \\ \text{où } \omega = kc \end{array}}$

qu'on peut prendre $= 0$ quitte à redéf. l'origine des tps

• Interprétaº φ : On observe en chq pt 1 oscillaº en φ ou en oppositº de φ [selon le signe de $\cos(kx+\varphi_x)$] et d'amplitude prop. à $|\cos(kx+\varphi_x)|$.

• Rq : La relaº entre k & ω est identiq pour les OS & les OPPS. C'est normal car tte OPPS peut s'écrire comme la Σ de 2 OS et réciproquemᵗ. MAIS attentº il n'y a pas de propagaº.

↳ on a donc 2 bases eq. pour développer les sol. Le choix dépendra du pbm considéré ou encore des CLs.

$$\cos(\omega t+\varphi_t)\cos(kx+\varphi_x) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cos(\omega t+kx+\varphi_t+\varphi_x)}_{OPP^-} + \underbrace{\cos(\omega t-kx+\varphi_t-\varphi_x)}_{OPP^+}\Big]$$

et $\cos(\omega t \pm kx + \varphi) = \cos(\omega t)\cos(\pm kx + \varphi)$
$- \sin(\omega t)\sin(\pm kx + \varphi)$

$= \cos(\omega t)\cos(kx \pm \varphi)$
$+ \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\cos(kx \pm \varphi \mp \frac{\pi}{2})$

- Interprétat° φ : le fait q̄ l'OS peut se décomposer comme la Σ d'1 OPP$^+$ et d'1 OPP$^-$ traduit le fait q̄ les CLs induisent de la réflexion sur les bords (fermeture par des impédances terminales p.c.).

Manip : Illustrer sur le tube de Kundt l'oscillat° en chq pt ainsi q̄ l'importance des CLs / impédances terminales (quasi ∞ au bout et vibrat° imposée en entrée).

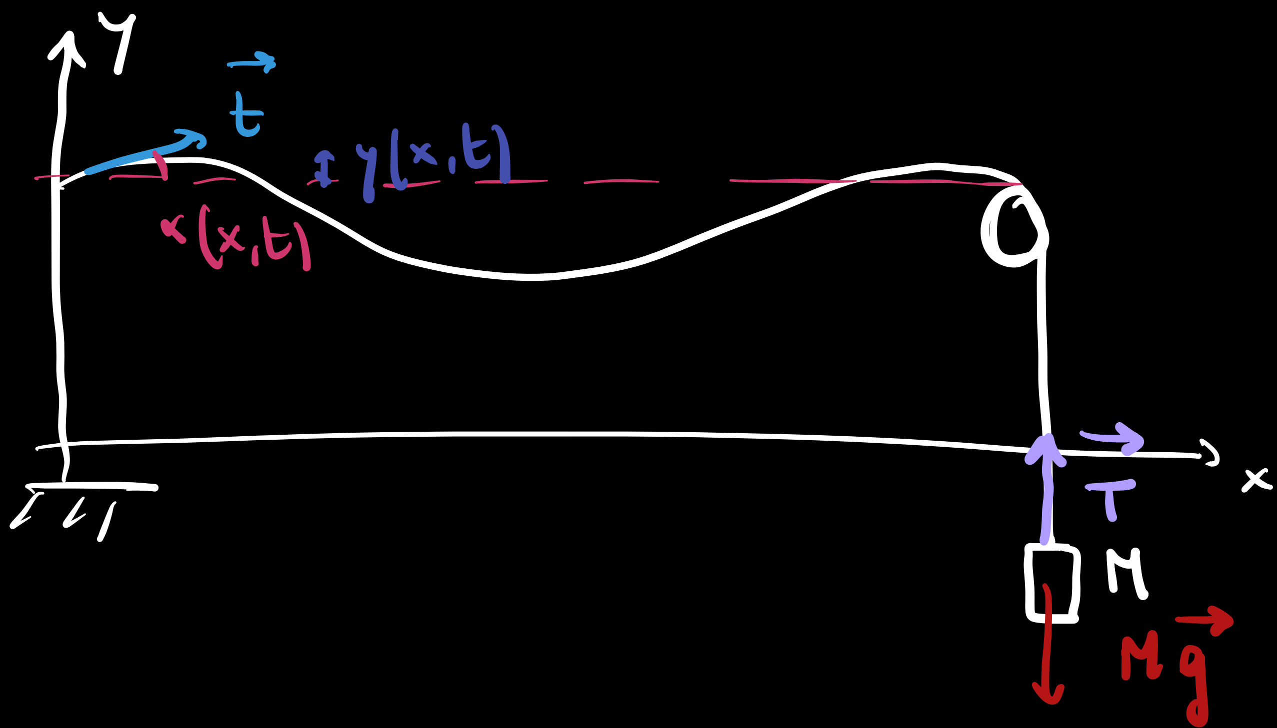
- RQ : La déf. d'OS est ici donnée ds le cadre de la φ classiq. En MQ, 1 OS est le $\times$ de 2 f° complexes. Par csqt, les OPPS sont des OS ds ce cadre (cf f° d'onde stationnaires de la part. quantiq libre).

2) Modes

a) Calcul des modes propres

- Nous allons nous intéresser à 1 cas particulier d'OS obtenue en imposant des CLs rigides aux frontières du domaine, i.e. on impose la valeur de l'1 des 2 grandeurs couplées en $x=0$ et $x=L$.

- Ex: corde de Melde



Hyp: ① OS la corde fixe aux 2 bouts.

② OS q̄ la masse M est tellem^t grande q̄ son accélérat° est négligeable

↳ PFD à la masse : $Mg = T$

③ On considère le déplacem^t purem^t vertical, ce qui revient à supposer la corde inextensible

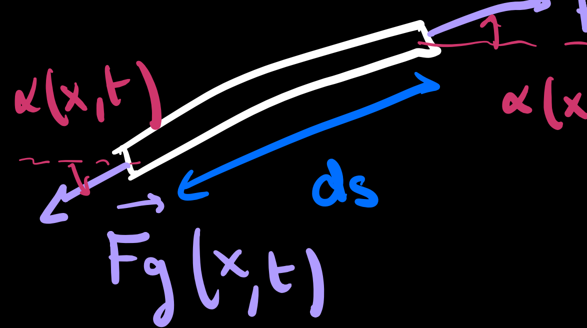
④ OS la corde homogène, de masse linéiq̄ μ uniforme.

(5) On néglige l'amortissem^t (fluide, rayonnem^t acoustiq̄, dissip° interne)

(6) On néglige l'influence de la pesanteur.

(7) OS de petits déplacem^t verticaux, de sorte q̄ le vecteur tangent $\vec{t}$ à la corde fait 1 angle $\alpha \ll 1$ avec l'horizontale.

PFD à 1 élém^t de corde ds le réf. du labo (galiléen):



$$\mu\, ds\, \vec{a}\left(x+\frac{dx}{2},t\right) = \vec{F_d}(x+dx,t) + \vec{F_g}(x,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = |\vec{F_d}(x+dx,t)| \cos\alpha(x+dx,t) - |\vec{F_g}(x,t)| \cos\alpha(x,t) \\ \mu\, ds \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left(x+\frac{dx}{2},t\right) = |\vec{F_d}(x+dx,t)| \sin\alpha(x+dx,t) - |\vec{F_g}(x,t)| \sin\alpha(x,t) \end{cases}$$

Comme $\alpha \ll 1$, on a au 1er ordre:

$$|\vec{F_d}(x,t)| = |\vec{F_g}(x,t)| = T, \quad ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \simeq dx \text{ et}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T \sin\alpha) \simeq T\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Or $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, soit $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{où } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ EOC

• On cherche alors la sol° sous la forme d'1OS qui s'impose naturellem^t car on impose les vibraº en des pts particuliers :

$$y(x,t) = A y_0 \cos(\omega t + \varphi_t)\cos(kx + \varphi_x)$$

• On impose les CLs :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi_x = 0 \\ \cos(kL + \varphi_x) = 0 \end{cases}$$

La 1ère eqn donne $\varphi_x = \pm \frac{\pi}{2}$: on garde $\varphi_x = -\frac{\pi}{2}$ car prendre $+\frac{\pi}{2}$ revient à changer y_0 en $-y_0$: $\cos(kx + \frac{\pi}{2}) = -\sin(kx) = -\cos(kx - \frac{\pi}{2})$.

La 2nde eqn donne $\sin(kL) = 0$ valable q pour l'EOC

$\Leftrightarrow \boxed{k = k_n = \frac{n\pi}{L}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ ou $\boxed{\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}}$

(car $n \to -n$ revient à $y_0 \to -y_0$).

• On voit donc apparaître 1 nbre os dénombrable de sol° part. appelées <u>modes propres</u>

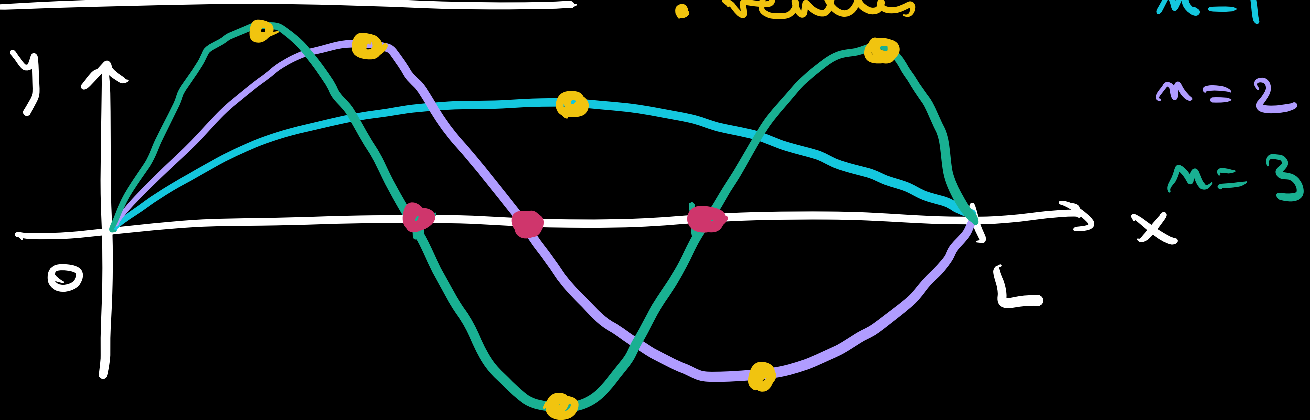
et qui correspondent à des OS qui vérifient les CLs :

$$\boxed{y_n(x,t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi\right)}$$

- RQ : On parle parfois de modes normaux car ils sont $\perp$ pour le produit scalaire canoniq $\langle f, g \rangle = \int f^* g$ (+ loin).

- RQ 2 : C'est l'éq. des modes propres pour 1 ens. d'oscillateurs couplés. On rappelle qu'en présence de N DDLs, il y a N modes propres. C'est donc normal qu'ici on en trouve 1 nbre ∞.

- Allure des modes :



- On définit alors les noeuds & ventres de vibra° :
  - noeud : régions de l'espace où la vibra° est nulle à $\forall$ tps
  - ventre : ______________ d'amplitude max à $\forall$ tps.

- On notera qu'ici, le mode n présente n ventres et $n-1$ noeuds intérieurs.

- On aurait pu trouver l'expression des modes en utilisant les impédances. Pour la corde de Melde, on peut trouver l'impédance par analogie. Si on note $F \underset{(=F_d)}{=} T\alpha = T\dfrac{\partial y}{\partial x}$ alors

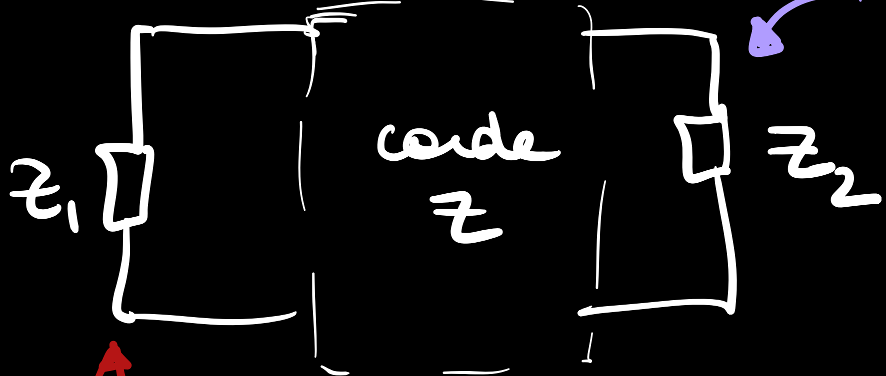
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = T\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

et par analogie avec le coax

$$\begin{cases} v \leftrightarrow i \\ F \leftrightarrow u \\ \mu \leftrightarrow -\Lambda \end{cases} \qquad T \leftrightarrow -\frac{1}{\Gamma}$$

On retrouve bien $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ et on a également $Z = \dfrac{F}{v} = \sqrt{T\mu}$.

En $x=0$ et $x=L$, on impose $F=T$ et $v=0$.
Cela revient à dire qu'on a fermé la corde avec 2 impédances $Z_1 = Z_2 = +\infty$.



$$r = \frac{v_r(L,t)}{v_i(L,t)} = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2} = -1$$

$$r' = \frac{v_i(0,t)}{v_r(0,t)} = \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1} = -1$$

Comme $\begin{cases} v_i(x,t) = v_{0,i}\cos(\omega t - kx + \cancel{\varphi_i}) = 0 \\ v_r(x,t) = v_{0,r}\cos(\omega t + kx + \varphi) \end{cases}$

quitte à redéf. l'origine des temps

on a $v_{0,i}\cos(\omega t) = -v_{0,r}\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \begin{cases} v_{0,i} = -v_{0,r}\cos\varphi \\ 0 = v_{0,r}\sin\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = 0\ (\pi)$ et $v_{0,r} = -\dfrac{v_{0,i}}{\cos\varphi}$

On peut prendre $\varphi = 0$, quitte à faire la transformao $v_{0,r} \to -v_{0,r}$.

On a donc $\begin{cases} v_i(x,t) = v_{0,i}\cos(\omega t - kx) \\ v_r(x,t) = -v_{0,i}\cos(\omega t + kx) \end{cases}$

De (+) $\quad -\dfrac{\cos(\omega t + kL)}{\cos(\omega t - kL)} = -1 \Rightarrow \cos(\omega t + kL) = \cos(\omega t - kL)$

Lo on retrouve $\bar{q}$ $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

et de (+) $v(x,t) = v_{0,i}\left[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right]$

soit $v(x,t) = 2v_{0,i}\sin(\omega t)\sin(kx)$

et donc $y(x,t) = -\frac{2v_{0,i}}{\omega}\cos(\omega t+\varphi_i)\sin(kx)$

↳ c'est l'expression obtenue précédemment !

- On retiendra donc que le confinement de l'onde induit 1 quantification des vecteurs d'onde ⇔ des pulsations propres de l'onde.

b) Obtention d'1 sol qcq

- Par linéarité, on obtient toutes les sol° vérifiant les CLs par comb. linéaire des ≠ modes :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_{0,n}\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t+\varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

- Il s'agit d'1 manière ≠ de construire 1 sol° que le paquet d'onde, qui lui se base sur les OPPS. L'utilisation des modes est + adaptée pour imposer les CLs.

- Les ctes $y_{0,n}$ et φ_n sont obtenues à partir des CIs, i.e. par la donnée de $y(x,0)$ et de la vitesse initiale $\partial y/\partial t\,(x,0)$.

↳ il suffit pour cela de projeter (les modes sont ⊥)

$\hookrightarrow \displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$

$$= \int_0^L \frac{dx}{2}\left\{\cos\left((n-m)\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left((n+m)\frac{\pi x}{L}\right)\right\}$$

$$= \frac{L}{2\pi}\left[\frac{\sin\left((n-m)\frac{\pi x}{L}\right)}{n-m} - \frac{\sin\left((n+m)\frac{\pi x}{L}\right)}{n+m}\right]_0^L$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{L}{2} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Ainsi $y(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_{0,n}\cos\varphi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\hookrightarrow \displaystyle\frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = y_{0,n}\cos\varphi_n$

et $\displaystyle\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} y_{0,n}\sin\varphi_n \frac{n\pi c}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$\hookrightarrow \displaystyle\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{n\pi c}{L}y_{0,n}\sin\varphi_n$

- Rq : Ds le cas g^{al} $y(x,t)$ n'est pas 1 OS, mais 1 superposi^{o} d'OS. Par contre, si le syst. est préparé initialem^{t} ds 1 mode alors $y(x,t)$ est 1 OS.

c) Energie d'1 mode

- Pour calculer l'énergie d'1 mode, on procède là encore par analogie :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{F^2}{2T}$$

$$\text{soit } \mathcal{E} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{\text{cinétiq}} + \underbrace{\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}_{\text{potentielle liée au travail de la tension}}$$

En effet, il suffit d'appliquer le TPC à l'élém^t de partie :

$$\frac{dE_c}{dt} = F(x+dx,t)v(x+dx,t) - F(x,t)v(x,t) + P_{int}$$

solide déformable

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial x} v + F\frac{\partial v}{\partial x}\right] dx + P_{int}$$

$$= \left[\mu v\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{T} F\frac{\partial F}{\partial t}\right] dx + P_{int}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{F^2}{2T}\right)\right] dx + P_{int}$$

$\Rightarrow$ $P_{int} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F^2}{2T}\right)dx$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{F^2}{2T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(Fv)$$: eqn de conservat° de l'énergie

- Pour le mode n, on peut calculer E_n en intégrant sur toute la longueur de corde :

$$E_n = \int_0^L dx \left\{ \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

Or $y_n(x,t) = y_{0,n} \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\frac{\partial y_n}{\partial x}(x,t) = \frac{n\pi}{L} y_{0,n} \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial t}(x,t) = -\frac{n\pi c}{L} y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

soit $E_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{L} y_{0,n}\right)^2 \int_0^L dx \left\{ c^2\mu \sin^2\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + T\cos^2\left(\frac{n\pi c t}{L} + \varphi_n\right) \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$

$$E_n = \frac{T}{4}\left(\frac{n\pi}{L} y_{0,n}\right)^2$$

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2 T}{4L} y_{0,n}^2} \propto n^2$$

- $\oplus$ 1 mode a 1 grand nbre de noeuds, $\oplus$ il a 1 énergie importante (éq. classiq du th de Sturm-Liouville en MQ).

• RQ: Il n'y a pas quantificat° de l'énergie bien qu'il y ait quantificat° des vecteurs à pulsat° propres car $E_n \propto y_{0,n}^2$. Autrement dit, l'énergie d'1 mode est cste et égale à l'énergie injectée. Cela est ≠ de la MQ où l'énergie est quantifiée. Cela vient en réalité de la condit° de normalisat° de la f° d'onde ($y_{0,n}$ fixée).

3) Ondes stationnaires résonantes

• On change les CLs qu'on impose, et OS qu'on excite ~ le syst. en 1 extrémité ($x=0$).

$$\begin{cases} y(0,t) = y_0 \cos(\omega t) \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

• On part de $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi_t)\cos(kx + \varphi_x)$ et on trouve

$$\begin{cases} \varphi_t = 0 \quad \text{et} \quad A\cos\varphi_x = y_0 \\ \cos(kL + \varphi_x) = 0 \implies \varphi_x + kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

On a donc $A(-1)^n \sin(kL) = y_0$

$$\Rightarrow A = (-1)^n \frac{y_0}{\sin(kL)}$$

DONC $y(x,t) = \frac{(-1)^n y_0}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \cos\left(kx + \frac{\pi}{2} + n\pi - kL\right)$

$$\boxed{y(x,t) = \frac{y_0}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(k(L-x))}$$

- On constate donc q̄ pour tte pulsaᴓ ω s'établit ds le syst. 1 OS.

⚠ c'est ≠ des CLs rigides où on n'observe des OS q̄ pour certaines pulsaᴓ.

- De ⊕, on voit q̄ l'amplitude div qd :

$$k_n L = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

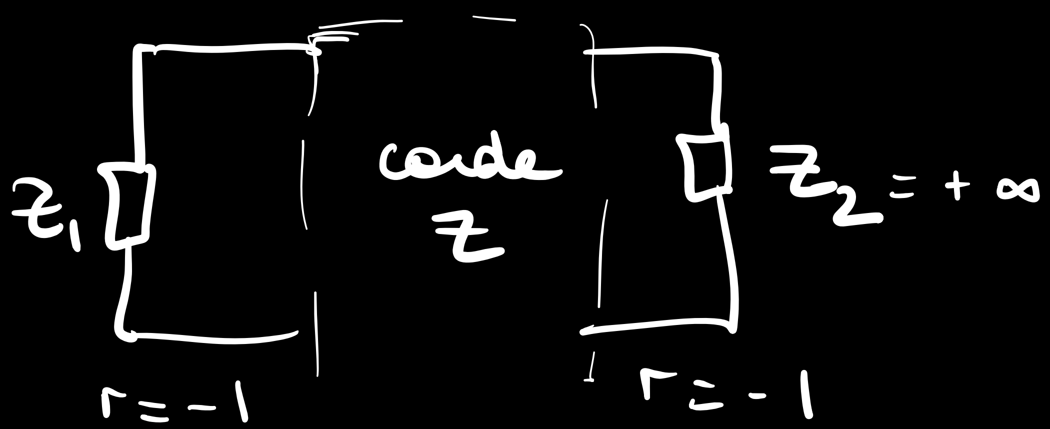
⇒ on observe 1 résonance qd ω coïncide avec 1 pulsaᴓ propre de la corde.

Autrem^t dit, les OS résonantes sont les modes propres.

- RQ : En pratiq, $y(x,t)$ ne dv pas à cause de toutes les sources de dissipat° & les NLs q nous n'avons pas prises en compte.

- RQ2 : C'est l'éq. du RSF pour 1 ens. discret d'oscillateurs. On retrouve donc bien q les pulsat° de résonance correspondent aux pulsat° propres du syst.

- RQ3 : On peut proposer une interprétat° interférentielle des résonances.
  ↳ réflexion totale en $x = L$ (impédance ∞)



↳ en $x = 0$, l'amplitude de vibrat° est y_0 et elle est très petite devant l'amplitude max. de vibrat° de la corde $\dfrac{y_0}{\sin(kL)}$ au voisinage d'1 résonance

$\Rightarrow$ quasi-noeud de vitesse en $x = 0$

↳ $Z_1 \simeq +\infty$

↳ le déphasage acquis par 1 OPPS au bout d'1 aller-retour est

$$2kL + \pi + \pi = 2kL + 2\pi$$

2 réflexions ($r \in \mathbb{R}^-$)

↳ résonance si l'onde au bout d'1 aller-retour s'ajoute en phase (constructivement) avec l'onde fournie par le vibreur,

soit $2k_nL + 2\pi = 2n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

• Rq 4 : Si le forçage est harmoniq alors l'onde obtenue est 1 OS. Ce n'est pas le cas lorsq le forçage n'est pas harmoniq : on a alors 1 $\underbrace{\text{superpositiO}}_{\text{décompositiO en série de Fourier de l'excitatiO.}}$ d'OS (et pas de modes ⚠).

Tableau récapitulatif :

Phénomène ondulatoire	Grandeurs couplées	Célérité	Impédance propagative
em	$\vec{E}$, $\vec{B}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$
électrocinétiq̄	u, i	$c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$	$Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$
compression d'1 fluide	p, $\vec{v}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$	$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$
compression d'1 solide	v, σ	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$Z = \sqrt{E\rho}$
flexion d'1 corde	v, F	$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$Z = \sqrt{T\mu}$
flexion d'1 poutre	v, M	/	/