

Université de Montpellier

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021



Électromagnétisme

HMEF104 - MEEF 2nd degré

Benjamin GUISELIN

Version du 18 janvier 2021

Ce cours est en grande partie inspiré de celui de Kenneth Maussang de l'année universitaire 2019-2020, que je remercie.

Dans ce document, les remarques seront notées à l'aide d'un trait vertical noir, les remarques importantes à l'aide d'un trait vertical rouge, et les exemples à l'aide d'un trait vertical vert. De plus, les vecteurs seront notés en gras. Enfin, les parties hors-programme seront indiquées par l'abréviation HP.

Table des matières

1. Electrostatique dans le vide	7
1.1. Force électrostatique	7
1.1.1. Postulat de la charge	7
1.1.2. Expression de la force électrostatique	7
1.1.3. Notion de champ électrique	8
1.1.4. Notion de potentiel électrique	9
1.2. Loi de Coulomb	10
1.2.1. Distribution de charges	10
1.2.2. Champ créé par une distribution volumique de charges	10
1.2.3. Champ créé par des distributions surfacique et linéique de charges	11
1.2.4. Propriétés de continuité du champ électrique	11
1.3. Potentiel électrostatique	12
1.3.1. Expressions intégrales	12
1.3.2. Propriétés de continuité du potentiel électrique	13
1.4. Énergie électrostatique	14
1.4.1. Cas d'une distribution discrète de charges ponctuelles	14
1.4.2. Cas d'une distribution volumique de charges	15
1.5. Lignes de champ et équipotentielles	15
1.5.1. Lignes de champ	15
1.5.2. Tube de champ	15
1.5.3. Équipotentielles	16
1.6. Formulation locale de l'électrostatique	16
1.6.1. Équation au rotationnel	16
1.6.2. Équation à la divergence	16
1.6.3. Équation de Poisson (HP)	17
1.6.4. Densité volumique d'énergie électrostatique (HP)	18
1.7. Formulation globale de l'électrostatique	18
1.7.1. Circulation du champ électrique	18
1.7.2. Théorème de Gauss	19
1.7.3. Invariances du champ et du potentiel électriques	20
1.7.4. Symétries du champ et du potentiel électriques	20
1.7.5. Application du théorème de Gauss	21
1.7.6. Tube de champ	21
1.8. Relations de passage du champ électrique (HP)	22
1.8.1. Discontinuité de la composante normale	22
1.8.2. Continuité de la composante tangentielle	23
1.9. Extensions de l'électrostatique	23
1.9.1. ARQS électrique (HP)	23
1.9.2. Electrostatique dans les milieux isolants (HP)	24
1.9.3. Analogie avec la gravitation	25
2. Le dipôle électrostatique	27
2.1. Propriétés électrostatiques du dipôle	27
2.1.1. Définition	27
2.1.2. Calcul du potentiel électrostatique	27
2.1.3. Calcul du champ électrique	29

2.1.4.	Diagramme de rayonnement	29
2.2.	Actions mécaniques sur un dipôle	31
2.2.1.	Cas d'un champ électrique uniforme	31
2.2.2.	Cas d'un champ électrique non uniforme	33
2.2.3.	Explication de la solvatation	35
2.3.	Approximation dipolaire des distributions de charges (HP)	35
2.4.	Moment dipolaire des molécules et actions entre dipôles	37
2.4.1.	Les différents types de dipôles	37
2.4.2.	Actions entre dipôles	37
3.	Magnétostatique dans le vide	41
3.1.	Distributions de courants	41
3.1.1.	Définition	41
3.1.2.	Description du mécanisme de la conduction	41
3.1.3.	Intensité du courant	42
3.1.4.	Conservation de la charge	43
3.1.5.	Équivalences entre les distributions volumique, surfacique et linéique de courants	43
3.2.	Introduction aux effets magnétiques	44
3.3.	Formulation globale de la magnétostatique	45
3.3.1.	Conservation du flux	45
3.3.2.	Théorème d'Ampère	45
3.3.3.	Symétries et invariances du champ magnétique	46
3.3.4.	Application du théorème d'Ampère	47
3.3.5.	Relations de passage du champ magnétique (HP)	47
3.4.	Formulation locale de la magnétostatique	49
3.4.1.	Équation à la divergence	49
3.4.2.	Équation au rotationnel	49
3.5.	Formulation intégrale de la magnétostatique : loi de Biot et Savart (HP)	50
3.5.1.	Énoncé	50
3.5.2.	De Biot et Savart aux équations locales	51
3.6.	Potentiel vecteur (HP)	52
3.6.1.	Définition	52
3.6.2.	Notion de jauge	52
3.6.3.	Équation de Poisson	53
3.6.4.	Expression intégrale	53
3.7.	Approximation dipolaire des distributions de courants	55
3.7.1.	Calcul du potentiel vecteur (HP)	55
3.7.2.	Moment dipolaire magnétique	56
3.7.3.	Champ magnétique dans l'approximation dipolaire	57
3.7.4.	Actions subies par un circuit dans un champ magnétique	57
3.7.5.	Extensions aux distributions surfacique et volumique de courants, notion de pôles magnétiques	58
3.8.	Extensions de la magnétostatique	59
3.8.1.	ARQS magnétique	59
3.8.2.	Magnétostatique dans la matière aimantable (HP)	60
4.	Induction électromagnétique	63
4.1.	Actions mécaniques subies par les courants dans un champ magnétique	63
4.1.1.	Origine de la loi de Laplace	63
4.1.2.	Loi de Laplace	63
4.1.3.	Actions exercées sur un conducteur entier	64
4.1.4.	Définition légale de l'Ampère (HP)	65

4.2.	Travail des forces de Laplace	66
4.2.1.	Expression générale	66
4.2.2.	Expression dans un champ stationnaire - théorème de Maxwell	67
4.2.3.	Énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant constant dans un champ magnétique stationnaire (HP)	68
4.2.4.	Puissance des forces de Laplace	68
4.3.	Lois macroscopiques de l'induction	68
4.3.1.	Introduction aux phénomènes d'induction	68
4.3.2.	Loi de Faraday	71
4.3.3.	Loi de modération de Lenz	72
4.3.4.	Bilan de puissance	73
4.3.5.	Résolution d'un problème d'induction pour un circuit fermé	74
4.4.	Autoinductance et inductance mutuelle	74
4.4.1.	Autoinductance	74
4.4.2.	Inductance mutuelle	76
4.5.	Approche fondamentale de l'induction (HP)	78
4.5.1.	Équations de Maxwell dans le vide dans l'ARQS magnétique	78
4.5.2.	Existence des potentiels scalaire et vecteur	78
4.5.3.	Énergie magnétique d'une distribution de courants	79
4.5.4.	Loi d'Ohm locale généralisée	81
4.5.5.	Induction de Neumann	82
4.5.6.	Induction de Lorentz	83
4.5.7.	Cas général d'un circuit déplacé dans un champ magnétique variable	84
4.5.8.	Champ électromoteur	85
5.	Électromagnétisme dans le vide	87
5.1.	Conservation de la charge	87
5.1.1.	Formulation globale	87
5.1.2.	Formulation locale	87
5.2.	Équations de Maxwell	88
5.2.1.	Équation de Maxwell-Gauss	88
5.2.2.	Équation de Maxwell-Thomson	88
5.2.3.	Équation de Maxwell-Faraday	88
5.2.4.	Équation de Maxwell-Ampère	89
5.3.	Propriétés des équations de Maxwell	89
5.3.1.	Principe de superposition	89
5.3.2.	Conservation de la charge	89
5.3.3.	Conservation de l'énergie	90
5.3.4.	Propagation du champ électromagnétique dans le vide illimité	91
5.3.5.	Relations de passage du champ électromagnétique (HP)	92
5.4.	Potentiels (HP)	94
5.4.1.	Définition	94
5.4.2.	Transformation de jauge	95
5.4.3.	Condition de jauge	95
5.4.4.	Équations de propagation des potentiels	96
5.4.5.	Potentiels retardés	98
A.	Formulaire d'analyse vectorielle	99
A.1.	Dérivées partielles	99
A.1.1.	Définition	99
A.1.2.	Propriétés	99
A.1.3.	Théorème de Schwarz	100
A.1.4.	Différentielle d'une fonction	100

A.2. L'opérateur gradient (nabla)	100
A.2.1. Définition	100
A.2.2. Propriétés	101
A.3. L'opérateur divergence	101
A.3.1. Définition	101
A.3.2. Propriétés	102
A.4. L'opérateur rotationnel	102
A.4.1. Propriétés	103
A.5. L'opérateur laplacien	103
A.5.1. Laplacien d'un champ scalaire	103
A.5.2. Laplacien d'un champ vectoriel	104
A.6. Dérivée d'une fonction selon un vecteur	104
A.6.1. Cas d'un champ scalaire	104
A.6.2. Cas d'un champ vectoriel	105
A.6.3. Propriétés	105

1. Électrostatique dans le vide

Dans tout ce chapitre, nous considérons que le régime permanent est atteint, toutes les grandeurs sont alors indépendantes du temps.

1.1. Force électrostatique

On repart de ce qui est connu du secondaire, à savoir la notion de force électrostatique entre deux charges ponctuelles. Tout d'abord, nous rappelons le concept de charge électrique. Après avoir rappelé l'expression de la force d'interaction entre deux charges, nous introduisons les notions de champ et de potentiel électriques.

1.1.1. Postulat de la charge

La charge q est une **grandeur scalaire** (non vectorielle) associée à toute particule élémentaire, et qui vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ elle est algébrique (positive ou négative),
- ▶ elle s'exprime en Coulomb (C) dans les unités du système international : $1\text{ C} = 1\text{ A}\cdot\text{s}$.
- ▶ elle est multiple entier de la charge électrique élémentaire e : $q = ne$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ($e = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$),
- ▶ elle est invariante par changement de référentiel,
- ▶ elle est additive : la charge totale d'un système constitué de plusieurs charges élémentaires est la somme de toutes les charges composant le système.
- ▶ elle est conservative : une charge électrique ne peut pas être détruite ni créée spontanément.

La conservation de la charge implique, par exemple, qu'en chimie, on vérifie quand on équilibre une équation de réaction que les membres de gauche et de droite ont la même charge globale.

1.1.2. Expression de la force électrostatique

Considérons deux charges q_1 et q_2 placées aux points M_1 et M_2 respectivement. On peut alors montrer expérimentalement que ces deux charges interagissent et que cette interaction a les caractéristiques suivantes :

- ▶ la force $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par q_1 sur q_2 est l'opposée de la force $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ exercée par q_2 sur q_1 (3^{ème} loi de Newton),
- ▶ ces deux forces s'exercent selon la droite reliant les deux charges,
- ▶ ces deux forces sont proportionnelles à q_1 et q_2 ,
- ▶ l'amplitude de ces deux forces varie comme $1/\|M_1 M_2\|^2$.

Dire que $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ est l'opposée de $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ revient à dire que ces deux forces ont le même support (même direction), qu'elles sont de sens opposés, et de même norme.

La force coulombienne est dite newtonienne car elle décroît comme l'inverse du carré de la distance entre les charges qui interagissent. C'est également le cas de la force d'interaction gravitationnelle. Ces forces ont des propriétés particulières (voir le cours de Mécanique).

Ainsi, la force $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = K \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^2} \mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{u}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire dirigé de q_1 vers q_2 , et K une constante de proportionnalité.

Cette constante de proportionnalité K peut s'exprimer en fonction de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$), ce qui permet d'aboutir à l'expression :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^3}, \quad (1.2)$$

où nous avons exprimé $\mathbf{u}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 / \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|$ en fonction des positions des deux charges.

1.1.3. Notion de champ électrique

La force $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ dépend des charges q_1 et q_2 , mais il est utile de la décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \mathbf{E}_1(M_2), \quad (1.3)$$

où $\mathbf{E}_1(M)$ est le **champ électrique** créé par la charge ponctuelle q_1 au point M . Au lieu de considérer que q_1 et q_2 interagissent, on peut voir $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ comme due à la présence d'un champ électrique créé par la charge q_1 dans tout l'espace, avec lequel interagit la charge q_2 .

Un champ est une fonction $f(M)$ qui est définie dans tout l'espace. Ce champ peut être à valeurs scalaires (comme la température ou la pression), ou à valeurs vectorielles (comme le champ électrique ou le champ de vitesses dans un fluide).

La comparaison des Eq. (1.2) et (1.3) permet d'aboutir à l'expression suivante du champ électrique créé au point M par une charge ponctuelle q située au point P :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}. \quad (1.4)$$

Le champ électrique est une force par unité de charge, mais il s'exprime plutôt en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ dans les unités du système international.

L'Éq. (1.3) donnant l'expression de la **force de Lorentz** subie par une charge q au point M se généralise au cas d'un champ électrique \mathbf{E} quelconque :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(M). \quad (1.5)$$

Dans le cas où une charge q est en présence d'un champ électrique \mathbf{E} et d'un champ magnétique \mathbf{B} , la **force de Lorentz** qu'elle subit vaut :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(M) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(M)), \quad (1.6)$$

où \mathbf{v} est le vecteur vitesse de la particule.

1.1.4. Notion de potentiel électrique

La force électrostatique $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ est une force conservative, c'est-à-dire qu'elle dérive d'une énergie potentielle $E_{p,e}$. Pour montrer cela, nous calculons le travail élémentaire δW reçu par la charge q_2 quand elle se déplace d'un déplacement élémentaire $d\mathbf{OM}_2$, la charge q_1 restant fixe :

$$\delta W = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\mathbf{OM}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^3} \cdot d\mathbf{OM}_2. \quad (1.7)$$

Or, la charge q_1 restant fixe, nous pouvons écrire que $d\mathbf{OM}_2 = d\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$, soit pour le travail :

$$\delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdot d\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}, \quad (1.8)$$

où nous avons noté $r = \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|$ et où nous avons utilisé le fait que pour tout vecteur \mathbf{r} de norme r , on a $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}d(r^2) = \frac{1}{2}d(r^2) = r dr$. Ainsi, le travail élémentaire s'écrit sous la forme $\delta W = -dE_{p,e}$, où nous reconnaissons l'expression de l'énergie potentielle :

$$E_{p,e} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|} + \text{Cste}, \quad (1.9)$$

à une constante additive près.

L'énergie potentielle électrique est la même pour q_1 et q_2 , de sorte qu'elle est parfois appelée énergie d'interaction.

Tout comme dans le cas de la force électrostatique, on peut décomposer l'énergie potentielle sous la forme

$$E_{p,e} = q_2 V_1(M_2), \quad (1.10)$$

où on a fait apparaître le **potentiel électrostatique** créé par la charge q_1 au point M_2 . En comparant cette dernière équation avec l'Éq. (1.9), nous obtenons l'expression suivante pour le potentiel électrostatique créé au point M par la charge q située au point P :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} + \text{Cste}, \quad (1.11)$$

qui est, tout comme l'énergie potentielle, défini à une constante près.

En combinant les définitions du champ et du potentiel électriques avec le lien entre la force et l'énergie potentielle, nous obtenons que :

$$\mathbf{E}(M) = -\nabla V(M). \quad (1.12)$$

On dit que le **champ électrique dérive d'un potentiel scalaire** : le calcul du champ électrique se réduit alors à celui d'un champ scalaire (son potentiel), puis au calcul du gradient de ce dernier. Il s'agit d'une commodité de calcul non négligeable.

Il faut prendre garde que cette relation n'est valable qu'**en régime permanent**, soit quand les distributions de charges sont indépendantes du temps. Si ce n'est pas le cas, un couplage entre le champ électrique et le champ magnétique intervient. Cela est relié au fait que les expressions du champ et du potentiel créés par une charge ponctuelle ne sont exacts que dans un référentiel dans lequel la particule est au repos. Dans un référentiel où une particule est en mouvement, ces expressions ne sont que des approximations, valables dans l'hypothèse où le mouvement de la particule est non relativiste (sa vitesse est très petite devant celle de la lumière dans le vide). Dans le cas général, il faut avoir recours au potentiel de Liénard-Wiechert (électrodynamique classique).

L'Éq. (1.12) indique que, dans les unités du système international, le potentiel électrique s'exprime en V. C'est aussi une énergie par unité de charge.

Pour un électron de charge électrique $-e$ accéléré par une différence de potentiel égale à 1 V, sa variation d'énergie potentielle vaut en valeur absolue $1 \text{ V} \times e \simeq 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$. Ceci définit l'unité d'énergie qu'est l'électron-volt.

1.2. Loi de Coulomb

Nous commençons par généraliser la notion de champ électrique.

1.2.1. Distribution de charges

Considérons une région Σ de l'espace à d dimensions remplie de charges. Nous supposons qu'on peut décrire les charges dans Σ de façon continue (ce qui revient à exiger que l'on regarde Σ à une distance grande devant la distance typique entre les charges).

$d = 1$ correspond à un fil de charges, $d = 2$ à une nappe de charges et $d = 3$ à un volume de charges.

Nous considérons un élément infinitésimal $d\tau$ de Σ centré sur le point P .

Pour $d = 1$, $d\tau$ est une longueur élémentaire, pour $d = 2$ c'est une surface élémentaire et pour $d = 3$ un volume élémentaire.

Comme la charge est une grandeur additive, la charge totale comprise dans $d\tau$ vaut

$$dq = \sum_{i \in d\tau} q_i, \quad (1.13)$$

où la somme s'étend sur toutes les particules i dans le volume $d\tau$. On associe alors au point P une densité de charges, défini par

$$\rho(P) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{dq}{d\tau}. \quad (1.14)$$

Une distribution volumique de charges s'exprime en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$, une distribution surfacique en $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$, et une distribution linéique en $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$.

1.2.2. Champ créé par une distribution volumique de charges

Nous nous plaçons tout d'abord à $d = 3$ dimensions, et nous considérons une charge q au point M , non incluse dans Σ à une distance grande devant la distance typique entre les charges dans Σ . Considérons le volume de charges dV centré sur P . D'après le paragraphe précédent, on peut assimiler ce volume à une charge ponctuelle $dq = \rho(P)dV$ au point P . Ce volume exerce donc sur la charge q une force $d\mathbf{F}(P)$:

$$d\mathbf{F}(P) = q d\mathbf{E}(P), \quad \text{où} \quad d\mathbf{E}(P) = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV. \quad (1.15)$$

La force totale exercée par Σ sur la charge q s'obtient alors en sommant les contributions de chaque volume élémentaire quand P décrit le volume Σ :

$$\mathbf{F} = \iiint_{P \in \Sigma} d\mathbf{F}(P) = q \iiint_{P \in \Sigma} d\mathbf{E}(P) = q \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV. \quad (1.16)$$

On reconnaît alors le champ $\mathbf{E}(M)$ créé par la distribution de charges Σ en comparant les Éq. (1.5) et (1.16), soit :

$$\mathbf{E}(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV. \quad (1.17)$$

Il est ainsi important de remarquer que le champ électrique vérifie le **principe de superposition** : le champ créé par plusieurs charges est la somme des champs créés par chacune des charges. En particulier, si la distribution de charges est discrète (on ne peut pas passer à la limite continue et définir une densité volumique de charges) alors le champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}(M) = \sum_{i \in \Sigma} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}_i M}{\|\mathbf{P}_i M\|^3}. \quad (1.18)$$

La loi de Coulomb n'est valable que dans le cas où les distributions ne dépendent pas du temps, ou encore dans un référentiel où les distributions sont au repos. Dans le cas général, il faut avoir recours aux équations de Jefimenko de l'électrodynamique classique, ou aux équations de Maxwell.

1.2.3. Champ créé par des distributions surfacique et linéique de charges

Le raisonnement de la section précédente se reproduit *mutatis mutandi* pour les cas $d = 1$ ou $d = 2$. Le champ créé au point M s'écrit :

- pour une distribution surfacique de charges $\sigma(P)$:

$$\mathbf{E}(M) = \iint_{P \in \Sigma} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dS, \quad (1.19)$$

- pour une distribution linéique de charges $\lambda(P)$:

$$\mathbf{E}(M) = \int_{P \in \Sigma} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} d\ell. \quad (1.20)$$

1.2.4. Propriétés de continuité du champ électrique

Quand M se rapproche d'une distribution de charges, on constate que l'intégrande diverge dans les équations précédentes. Il est donc légitime de se demander si le champ électrique est bien défini et continu partout dans l'espace. Tout d'abord, on remarquera que les intégrales sont toutes très bien définies en dehors des distributions, et donc **le champ électrique est au moins défini et continu dans tout l'espace en dehors des distributions de charges.**

Cas d'une distribution volumique de charges

On considère un point M dans une distribution volumique de charges. On isole une petite boule \mathcal{B}_ϵ centrée sur M et de rayon ϵ . Alors le champ électrique régnant au point M est la somme des champs électriques $\mathbf{E}_i(M)$ créé par la boule et $\mathbf{E}_e(M)$ créé par le reste de la distribution. Par définition, le champ $\mathbf{E}_e(M)$ est fini, l'intégrale permettant de le calculer converge. En ce qui concerne, $\mathbf{E}_i(M)$, il

s'écrit après passage en coordonnées sphériques de centre M :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(M) &= \iiint_{P \in \mathcal{B}_\epsilon} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\epsilon dr r^2 \frac{\rho(r, \theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\mathbf{e}_r)}{r^3} \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\epsilon dr \frac{\rho(r, \theta, \varphi)}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (1.21)$$

On peut alors majorer sa norme, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathbf{E}_i(M)\| \leq 2\pi^2 \epsilon \frac{\max_{P \in \mathcal{B}_\epsilon} \rho(P)}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

Le membre de droite tend donc vers 0 quand ϵ tend vers 0, et donc le membre de gauche aussi, car il est positif. Ainsi, nous avons montré que le champ électrique est défini et continu **également à l'intérieur des distributions volumiques de charges**.

Cas d'une distribution surfacique de charges

Nous reprenons le raisonnement précédent en considérant maintenant le point M sur une distribution surfacique de charges. Là encore, nous isolons un disque de rayon ϵ autour du point M et décomposons le champ électrique au point M en la somme du champ créé par l'extérieur du disque, qui est bien défini, et du champ créé par l'intérieur du disque. Ce dernier s'écrit, après passage en coordonnées polaires :

$$\mathbf{E}_i(M) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr r \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r\mathbf{e}_r)}{r^3} = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r. \quad (1.23)$$

L'intégration sur la variable r de la fonction $r \rightarrow 1/r$ diverge quand ϵ tend vers 0, et donc nous en déduisons que **le champ électrique n'est pas défini sur une distribution surfacique de charges** dans le cas général et il est donc **discontinu à la traversée de cette dernière**.

Cas d'une distribution linéique de charges

La distribution linéique de charges étant encore moins régulière qu'une distribution surfacique, la même conclusion que pour cette dernière s'impose : **le champ électrique n'est pas défini sur une distribution linéique de charges**.

Cas d'une charge ponctuelle

L'Éq. (1.4) montre que le champ électrique **n'est pas défini au niveau d'une charge ponctuelle**, car il y diverge.

1.3. Potentiel électrostatique

1.3.1. Expressions intégrales

Nous avons vu précédemment que le champ électrique vérifiait un principe de superposition. En outre, nous avons obtenu une relation entre le champ électrique et le potentiel électrique (voir l'Éq. (1.12)). Cette dernière étant linéaire, on en déduit également que le potentiel électrique V vérifie un principe de superposition. Ainsi, nous obtenons les expressions intégrales suivantes pour l'expression du potentiel électrique créé par une distribution continue de charges Σ (à une constante additive près que nous ne reportons pas ici) :

► en $d = 3$:

$$V(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} dV, \quad (1.24)$$

► en $d = 2$:

$$V(M) = \iint_{P \in \Sigma} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} dS, \quad (1.25)$$

► et en $d = 1$:

$$V(M) = \int_{P \in \Sigma} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} d\ell. \quad (1.26)$$

Très souvent, on impose que le potentiel électrique soit nul à grande distance de Σ . La constante additive est alors la plupart du temps nulle.

Contrairement à l'Éq. (1.18) qui implique le calcul d'une intégrale vectorielle, l'Éq. (1.24) permet de ramener le calcul d'un champ électrique à celui d'une intégrale scalaire, puis à prendre son gradient. Dans le cas où les théorèmes des sections suivantes pour le calcul du champ électrique ne sont pas applicables et qu'un calcul direct par la loi de Coulomb est nécessaire, on se ramènera au calcul du potentiel électrostatique, qui est plus simple.

Ces expressions intégrales ne sont vraies qu'en électrostatique. Quand les distributions de charges dépendent du temps, on peut toujours définir un potentiel électrostatique à partir du champ électrique par la relation :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t), \quad (1.27)$$

où $\mathbf{A}(M, t)$ désigne le potentiel vecteur défini par

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t), \quad (1.28)$$

où $\mathbf{B}(M, t)$ désigne le champ magnétique.

1.3.2. Propriétés de continuité du potentiel électrique

Le potentiel étant plus régulier que le champ électrique (car \mathbf{E} est obtenu par une dérivée par V), nous pouvons d'ores et déjà conclure que le **potentiel électrique est défini et continu dans tout l'espace vide de charge ou à l'intérieur des distributions volumiques de charges.**

Cas d'une distribution surfacique de charges

Nous reprenons le raisonnement fait pour le champ électrique. Nous considérons un point M sur une distribution surfacique de charges et nous isolons un disque \mathcal{D}_ϵ de rayon ϵ centré sur M . Nous décomposons alors le potentiel électrique en une somme du potentiel électrique créé par l'extérieur du disque, bien défini, et de celui créé par l'intérieur du disque, qui s'écrit après passage en coordonnées polaires de centre M :

$$V_i(M) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr r \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\epsilon dr \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.29)$$

Ce potentiel peut être majoré :

$$|V_i(M)| \leq 2\pi\epsilon \frac{\max_{P \in \mathcal{D}_\epsilon} \sigma(P)}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.30)$$

ce qui montre que le **potentiel électrique est défini et continu sur les distributions surfaciques de charges**, car le membre de droite tend vers 0 quand ϵ tend vers 0.

Cas d'une distribution linéique de charges

Nous adaptons le raisonnement précédent et nous considérons un point M sur une distribution linéique de charges. Nous isolons un segment de longueur ϵ centré sur M et nous décomposons le potentiel électrique au point M en la somme du potentiel créé par le segment et le potentiel créé par le reste de la distribution. Le second est bien défini, mais le premier s'écrit :

$$V_i(M) = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx \frac{\lambda(x)}{4\pi\epsilon_0 |x|}, \quad (1.31)$$

qui diverge dans la limite où ϵ tend vers 0. On en déduit donc que le potentiel électrique **n'est pas défini sur les distributions linéiques et est discontinu à leur traversée.**

Cas d'une charge ponctuelle

L'Éq. (1.11) montre que le **potentiel électrique n'est pas défini au niveau d'une charge ponctuelle**, car il y diverge.

1.4. Énergie électrostatique

1.4.1. Cas d'une distribution discrète de charges ponctuelles

On considère un ensemble de n charges $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$ situées aux points M_i dans l'espace. Nous voulons déterminer l'énergie de cette distribution. Pour cela, nous commençons par particulariser une charge q_i et calculer l'énergie qu'un opérateur doit fournir pour l'amener de l'infini à M_i . On applique donc le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen à la charge q_i entre l'infini et M_i :

$$\Delta E_c = W_{op,i} + W_e, \quad (1.32)$$

où W_{op} désigne le travail fourni par l'opérateur, W_e , le travail des forces de Coulomb exercées par les charges $q_{j \neq i}$, et E_c son énergie cinétique. On suppose que la particule est initialement au repos, et qu'elle est placée au repos à sa position finale M_i , soit finalement :

$$W_{op,i} = -W_e = - \sum_{j \neq i} W_{e,j}, \quad (1.33)$$

où $W_{e,j}$ est le travail de la force électrique exercée par q_j sur q_i . Or, nous avons vu en Sec. 1.1.4 que cette force dérivait d'une énergie potentielle donnée par l'Éq. (1.10). Ainsi $W_{e,j}$ correspond à l'opposé de la variation de cette énergie potentielle entre l'infini et M_i , soit :

$$W_{op,i} = - \sum_{j \neq i} q_i [V_j(+\infty) - V_j(M_i)] = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \| \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \|}, \quad (1.34)$$

où V_j désigne le potentiel électrique créé par la charge q_j .

Pour obtenir l'énergie potentielle totale de la distribution due à l'interaction entre les charges, il suffit maintenant de sommer le travail de l'opérateur sur toutes les charges i , soit :

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_{op,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \| \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \|}, \quad (1.35)$$

où le facteur 1/2 vient du fait qu'on a compté deux fois chaque interaction. On remarquera que cette équation se réécrit sous la forme :

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i, \quad (1.36)$$

où V_i désigne le potentiel **créé au point M_i par l'ensemble des charges, sauf la charge q_i .**

1.4.2. Cas d'une distribution volumique de charges

Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent en considérant dorénavant une distribution volumique de charges. On décompose la distribution en volumes élémentaires dV de charges. Chaque volume élémentaire est centré sur un point $P \in \Sigma$, et porte la charge $dq = \rho(P)dV$. L'équation précédente se réécrit alors :

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{P \in \Sigma} dq V_{\setminus dV}, \quad (1.37)$$

où $V_{\setminus dV}$ est le potentiel créé au point P par la distribution volumique de charges privée du volume dV centré sur P .

On prendra garde à ne pas confondre le potentiel V avec l'élément de volume dV .

Or, le potentiel électrique est continu dans la distribution volumique de charges, on peut donc remplacer $V_{\setminus dV}$ par le potentiel créé par toute la distribution au point P , ce qui permet d'aboutir, en passant à la limite continue, à :

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \Sigma} \rho(P) V(P) dV = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \Sigma} dV \iiint_{P' \in \Sigma} dV' \frac{\rho(P)\rho(P')}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PP}'\|}, \quad (1.38)$$

la dernière égalité étant obtenue par la formule de Coulomb pour le potentiel.

Cette relation se généralise aux distributions surfaciques de charges, car le potentiel y est aussi continu. Par contre, il n'existe pas de telle formule pour une distribution linéique de charges, car l'intégrale est divergente.

1.5. Lignes de champ et équipotentielles

1.5.1. Lignes de champ

Par définition, les lignes de champ correspondent aux **lignes Γ orientées auxquelles le champ électrique est tangent**. Un élément infinitésimal de longueur $d\ell(M)$ au point M est un vecteur tangent à Γ s'il est colinéaire au champ électrique $\mathbf{E}(M)$ en ce même point, ou encore si

$$d\ell(M) \wedge \mathbf{E}(M) = \mathbf{0}. \quad (1.39)$$

Le long des lignes de champ, le potentiel électrique décroît. En effet, si on désigne par $dV(M)$ la variation infinitésimale de potentiel quand on se déplace de $d\ell(M)$, alors :

$$dV(M) = d\ell(M) \cdot \nabla V(M) = -d\ell(M) \cdot \mathbf{E}(M) < 0, \quad (1.40)$$

étant donné que par définition d'une ligne de champ, nous avons $d\ell(M) \cdot \mathbf{E}(M) > 0$.

Attention, ici dV désigne la différentielle du potentiel, et non l'élément infinitésimal de volume.

1.5.2. Tube de champ

On appelle tube de champ une **surface formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé**.

Par exemple, si le contour fermé est un cercle, alors le tube de champ est un cylindre dont les génératrices sont les lignes de champ.

1.5.3. Équipotentielles

Par définition, une équipotentielle est une **surface \mathcal{S} telle que le potentiel est constant sur \mathcal{S}** . Un élément infinitésimal de longueur $d\ell(M) = \mathbf{M}\mathbf{M}'$ au point M est compris dans \mathcal{S} si $V(M) = V(M')$, ou encore si :

$$0 = V(M') - V(M) = dV(M) = d\ell(M) \cdot \nabla V(M) = -d\ell(M) \cdot \mathbf{E}(M). \quad (1.41)$$

Ainsi, les équipotentielles sont orthogonales au champ électrique, et donc aux lignes de champ.

1.6. Formulation locale de l'électrostatique

D'après le théorème d'Helmholtz-Hodge, un champ de vecteurs qui s'annule à l'infini est entièrement caractérisé par la donnée de sa divergence et de son rotationnel. Ainsi, pour calculer le champ électrique, il faut se donner deux équations portant sur son rotationnel et sa divergence.

1.6.1. Équation au rotationnel

En électrostatique, le champ électrique dérive d'un potentiel électrique, de sorte que

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M) = \mathbf{0}, \quad (1.42)$$

car le rotationnel d'un gradient est nul.

Attention, cette équation locale n'est plus valable quand les distributions de charges dépendent du temps. Le membre de droite fait alors intervenir une dérivée partielle par rapport au temps du champ magnétique. Cette équation s'appelle l'équation de **Maxwell-Faraday** et s'écrit dans le cas général :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t). \quad (1.43)$$

Cette équation sera vue dans le cours d'induction.

1.6.2. Équation à la divergence

Il est possible de montrer, à partir de l'Éq. (1.18), l'équation de **Maxwell-Gauss** :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}. \quad (1.44)$$

En particulier, la divergence du champ électrique est nulle dans les régions vides de charges.

L'équation de Maxwell-Gauss reste valable quand les distributions de charges dépendent du temps.

Nous donnons ici la preuve à titre de remarque, car elle est d'un niveau mathématique avancé. Nous prenons la divergence de l'Éq. (1.18) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \nabla_M \cdot \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV, \quad (1.45)$$

où nous avons noté ∇_M pour insister que les dérivées doivent être calculées par rapport à la variable M . Or,

$$\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} = -\nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) = \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right). \quad (1.46)$$

Ainsi, nous obtenons, en réutilisant le fait que $\nabla_M = -\nabla_P$,

$$\nabla_M \cdot \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) = -\Delta_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) = -\Delta_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right), \quad (1.47)$$

où nous avons utilisé le fait que pour une fonction scalaire $f(M)$, on a $\Delta f(M) = \nabla \cdot (\nabla f)(M)$, où Δ désigne l'opérateur laplacien. Ainsi, le calcul de la divergence aboutit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M) = - \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \Delta_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV. \quad (1.48)$$

Pour poursuivre, on peut déjà montrer, par un calcul direct que $\Delta_P (1/\|\mathbf{PM}\|) = 0$, si $\mathbf{PM} \neq \mathbf{0}$. Nous pouvons donc restreindre l'intégrale à une boule \mathcal{B}_ϵ centrée sur M et de rayon ϵ . La divergence du champ électrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(M) &= - \iiint_{P \in \mathcal{B}_\epsilon} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \nabla_P \cdot \left(\nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right) dV \\ &= - \iiint_{P \in \mathcal{B}_\epsilon} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla_P \cdot \left(\rho(P) \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right) - (\nabla \rho(P)) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Le premier terme de l'équation se transforme en intégrale surfacique en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, et en notant \mathcal{S}_ϵ la sphère de centre M et de rayon ϵ :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M) = - \oint_{P \in \mathcal{S}_\epsilon} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(P) \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_r dS + \iiint_{P \in \mathcal{B}_\epsilon} (\nabla \rho(P)) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV. \quad (1.50)$$

Les deux intégrales peuvent se calculer en passant en coordonnées sphériques de centre M , en notant que $\nabla_P (1/\|\mathbf{PM}\|) = -\mathbf{e}_r/r^2$, soit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho(\epsilon, \theta, \varphi) - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\epsilon dr \nabla \rho(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho(\epsilon, \theta, \varphi) - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\epsilon dr \frac{\partial \rho}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \rho(\epsilon, \theta, \varphi) - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\epsilon dr [\rho(\epsilon, \theta, \varphi) - \rho(0, \theta, \varphi)] \end{aligned} \quad (1.51)$$

On prend maintenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$, le second membre s'annule, tandis que le premier donne une contribution non nulle qui donne bien l'équation de Maxwell-Gauss après intégration sur les variables angulaires. On pourra retenir à toutes fins utiles que :

$$\Delta \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{PM}). \quad (1.52)$$

1.6.3. Équation de Poisson (HP)

En combinant les Éq. (1.12) et (1.44), et en utilisant la définition du laplacien, on aboutit à l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel électrostatique :

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (1.53)$$

Cette équation de Poisson n'est valable que lorsque les distributions de charges sont indépendantes du temps. Dans le cas contraire, l'équation vérifiée par le potentiel devient une équation de D'Alembert avec source, de la forme :

$$\Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(M, t) = -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}, \quad (1.54)$$

dans la jauge de Lorenz. Par contre, dans la jauge de Coulomb, l'Éq. (1.53) reste valable.

1.6.4. Densité volumique d'énergie électrostatique (HP)

Nous allons donner une autre expression de l'énergie électrostatique d'une distribution volumique de charges que l'Éq. (1.38), à partir du champ électrique qu'elle crée. Pour cela, nous allons utiliser l'Éq. (1.44), ce qui donne :

$$E_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla \cdot \mathbf{E}(P) V(P) dV. \quad (1.55)$$

Comme la densité volumique de charges est nulle en dehors de la distribution, on peut en réalité intégrer sur tout volume \mathcal{V} contenant Σ . Par ailleurs, l'analyse vectorielle donne que :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}V) = (\nabla \cdot \mathbf{E}) V + \mathbf{E} \cdot \nabla V = (\nabla \cdot \mathbf{E}) V - \mathbf{E}^2, \quad (1.56)$$

la dernière égalité étant obtenue par la relation (1.12) entre le champ et le potentiel. Tout ceci permet de réécrire E_e sous la forme :

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \{ \nabla \cdot (\mathbf{E}V)(M) + \mathbf{E}^2(M) \} dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathbf{E}^2(M) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{E}V)(M) dV \end{aligned} \quad (1.57)$$

La deuxième intégrale se transforme en une intégrale surfacique sur la surface \mathcal{S} délimitant le volume \mathcal{V} par le théorème de Green-Ostrogradski, soit :

$$E_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathbf{E}^2(M) dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{M \in \mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(M) V(M). \quad (1.58)$$

Nous prenons maintenant pour \mathcal{S} une sphère de rayon R . Alors, d'après la loi de Coulomb, $V(M)$ décroît au moins comme $1/R$ à grande distance de la distribution (comme pour une charge ponctuelle), tandis que $\|\mathbf{E}(M)\|$ décroît au moins comme $1/R^2$. Ainsi le terme dans l'intégrale surfacique varie comme $1/R^3$, qu'on intègre sur la sphère d'aire proportionnelle à R^2 . Ainsi, l'intégrale surfacique varie comme $1/R$ et tend donc vers 0 si R tend vers $+\infty$. Ainsi, nous obtenons finalement :

$$E_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{E}^2(M) dV. \quad (1.59)$$

Contrairement à l'Éq. (1.38), l'intégrale ici ne porte pas uniquement sur le volume de la distribution, mais bien sur tout l'espace.

Ainsi, pour une distribution volumique de charges, on peut lui définir une **densité volumique d'énergie électrostatique** donnée par :

$$e_e(M) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(M). \quad (1.60)$$

1.7. Formulation globale de l'électrostatique

1.7.1. Circulation du champ électrique

Pour un contour $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ orienté de point initial A et de point final B , on définit la circulation du champ électrique \mathbf{E} le long de ce contour par :

$$\mathcal{C} = \int_{M \in \mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \mathbf{E}(M) \cdot d\boldsymbol{\ell}(M), \quad (1.61)$$

où $d\ell(M)$ est le vecteur tangent au contour au point M , de longueur élémentaire et orienté de A à B . En utilisant la relation entre le champ électrique et le potentiel, nous obtenons que la circulation du champ électrique s'écrit :

$$\mathcal{C} = - \int_{M \in \mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \nabla V(M) \cdot d\ell(M) = - [V(M)]_A^B = V(A) - V(B). \quad (1.62)$$

Plusieurs éléments importants sont alors à noter :

- ▶ En électrostatique, la circulation du champ électrique ne dépend pas du contour, mais uniquement des points initial et final : on dit que le champ électrique est **conservatif**.
- ▶ En particulier, la circulation du champ électrique sur un contour fermé est nulle.
- ▶ Remarquons également que la circulation du champ électrique entre deux points A et B correspond à la différence de potentiel entre les points initial et final, cela représente physiquement la tension entre les points A et B .

Le deuxième point aurait aussi pu être déterminé à partir de l'Éq. (1.42). En effet, en utilisant le théorème de Stokes, la circulation du champ électrique sur un contour fermé orienté \mathcal{C} s'écrit :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M) \cdot d\ell(M) = \iint_{M \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}} \nabla \wedge \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.63)$$

où $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ désigne la surface sous-tendue par le contour \mathcal{C} , et $d\mathbf{S}$ le vecteur normal à $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ au point M , de norme dS , et orienté compatiblement avec le contour \mathcal{C} (selon la « règle de la main droite »). Le premier point découle alors du second, en considérant deux contours $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ et $\mathcal{C}'_{A \rightarrow B}$ allant du point A au point B . Alors le contour $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{A \rightarrow B} \cup \mathcal{C}'_{B \rightarrow A}$ est un contour fermé et la circulation du champ électrique le long de ce contour est nulle. Or la circulation peut aussi s'écrire comme la somme de la circulation sur chacun des deux contours, et la circulation de \mathbf{E} sur $\mathcal{C}'_{B \rightarrow A}$ est l'opposée de celle sur $\mathcal{C}'_{A \rightarrow B}$.

Le potentiel électrique n'est pas une grandeur physique, il n'est pas mesurable, contrairement au champ électrique et à la tension. C'est donc pour cela qu'il est défini à une constante additive près, contrairement aux deux autres.

1.7.2. Théorème de Gauss

Nous considérons une surface \mathcal{S} **fermée orientée conventionnellement vers l'extérieur**, et on s'intéresse au flux du champ électrique à travers cette surface, défini par :

$$\Phi = \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.64)$$

où $d\mathbf{S}$ est le vecteur normal à la surface au point M , dirigé vers l'extérieur de la surface, et de norme dS .

Considérons le cas d'une charge ponctuelle q tout d'abord. En utilisant l'Éq. (1.4), le flux ϕ s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{M \in \mathcal{S}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}M \cdot d\mathbf{S}}{\|\mathbf{P}M\|^3}. \quad (1.65)$$

On peut alors distinguer deux cas :

- ▶ Si la charge q est incluse dans le volume délimité par \mathcal{S} , alors l'intégrande est toujours positive, et le flux sera différent de 0. D'ailleurs, on peut le calculer explicitement et montrer que l'intégrale est égale à l'angle solide total qui vaut $4\pi\text{sr}$, soit $\Phi = q/\epsilon_0$.
- ▶ Si la charge q est hors du volume délimité par \mathcal{S} , alors l'intégrande change de signe, et l'intégrale sera nulle, soit $\Phi = 0$.

En utilisant le principe de superposition pour le champ électrique, le résultat se généralise pour une distribution quelconque de charges et on obtient le **théorème de Gauss**.

Pour toute surface fermée \mathcal{S} orientée vers l'extérieur, le flux du champ électrique à travers \mathcal{S} est égal à la charge intérieure divisée par ϵ_0 , soit :

$$\Phi = \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \quad (1.66)$$

Ce théorème peut aussi être obtenu à partir de l'Éq. (1.44) en utilisant la formule de Green-Ostrogradski :

$$\Phi = \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \nabla \cdot \mathbf{E}(M) dV = \iiint_{M \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (1.67)$$

où on a noté $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ le volume délimité par la surface \mathcal{S} .

Tout comme l'équation de Maxwell-Gauss, le théorème de Gauss reste valable quand les distributions de charges dépendent du temps.

Le théorème de Gauss ne peut être appliqué que si le champ électrique présente plusieurs propriétés de symétrie et d'invariance que nous allons lister maintenant.

1.7.3. Invariances du champ et du potentiel électriques

On dit qu'un champ (scalaire ou vectoriel) est invariant selon une transformation \mathcal{T} si le champ garde une même valeur quand on effectue la transformation.

On liste ici quelques invariances usuelles : invariance par translation selon une coordonnée (x, y, z) , invariance par rotation selon un axe.

Une transformation \mathcal{T} correspond à la modification continue d'une coordonnée (de position pour les translations, ou angulaire pour les rotations), un champ invariant selon la transformation \mathcal{T} ne dépendra donc pas de la coordonnée qui est modifiée par la transformation.

Si un champ est invariant par translation selon le vecteur \mathbf{e}_z alors, il ne dépendra pas de z . Si un champ est invariant par rotation autour de l'axe porté par \mathbf{e}_z en coordonnées cylindriques (resp. sphériques), alors il ne dépendra pas de θ (resp. φ) en coordonnées cylindriques (resp. sphériques).

Un résultat important pour déterminer les invariances du champ et du potentiel électriques est le suivant : **les invariances de la distribution de charges sont aussi des invariances du champ et du potentiel électriques**. Ceci est une manifestation du **principe de Curie**, qui indique que les effets doivent au moins avoir les symétries des causes.

Cette propriété peut se démontrer facilement à partir des lois de Coulomb, par un changement de variable dans l'intégrale. Il faut alors se restreindre aux transformations affines unitaires, telles que leur partie linéaire soit de déterminant ± 1 , ce qui est le cas des translations et des rotations.

Ainsi, pour simplifier le nombre de coordonnées, il convient tout d'abord d'analyser les propriétés d'invariance des distributions de charges.

1.7.4. Symétries du champ et du potentiel électriques

On dit qu'un champ scalaire ou vectoriel $f(M)$ est symétrique (resp. antisymétrique) selon une transformation \mathcal{T} si $f(M')$ est l'image de $f(M)$ (resp. l'opposé de l'image) par la transformation \mathcal{T} lorsque M' est l'image de M par \mathcal{T} .

Les transformations de symétrie rencontrées en pratique sont les réflexions par rapport à des plans, par rapport à des droites ou par rapport à des points.

Dans le cas d'un champ scalaire $f(M)$, dire que \mathcal{T} est une symétrie (resp. antisymétrie) revient à dire que $f(M) = f(M')$ (resp. $f(M) = -f(M')$).

Tout comme pour les invariances, **les symétries de la distribution de charges sont aussi les symétries du champ et du potentiel électrique**. Ce résultat peut être démontré là aussi à partir des lois de Coulomb.

Cela permet donc d'en déduire les résultats suivants :

- Le potentiel électrique est nul dans les plans d'antisymétrie Π^* de la distribution de charges :

$$V(M \in \Pi^*) = 0. \quad (1.68)$$

- Le champ électrique est tangent aux plans de symétrie Π de la distribution de charges, et il est donc contenu dans les plans de symétrie de la distribution de charges.

$$\mathbf{E}(M \in \Pi) \in \Pi. \quad (1.69)$$

- Le champ électrique est orthogonal aux plans d'antisymétrie Π^* de la distribution de charges.

$$\mathbf{E}(M \in \Pi^*) \perp \Pi^*. \quad (1.70)$$

Contrairement aux invariances qui permettent de réduire le nombre de variables, les symétries du champ électrique permettent de déterminer la direction du champ, et donc de réduire le nombre de composantes non nulles.

1.7.5. Application du théorème de Gauss

Comme mentionné précédemment, le théorème de Gauss ne peut être appliqué que dans le cas où la distribution de charges présente plusieurs propriétés de symétrie. Le théorème de Gauss s'applique en plusieurs étapes résumées ici :

1. Étudier les invariances de la distribution de charges, cela permet alors de diminuer le nombre de variables.
2. Se placer en point M quelconque et étudier en ce point les propriétés de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de charges. On utilisera le fait que le champ électrique en M est contenu dans tout plan de symétrie de la distribution de charges **passant par** M et qu'il est orthogonal à tout plan d'antisymétrie de la distribution de charges **passant par** M .
3. Considérer une surface **fermée** à travers laquelle le flux du champ électrique peut être calculé facilement : on prendra des surfaces dont le vecteur normal est soit colinéaire, soit orthogonal au champ électrique, et sur lesquelles le champ électrique est invariant. En termes de lignes de champ, cela revient à prendre des surfaces tangentes ou orthogonales aux lignes du champ électrostatique.
4. Appliquer le théorème de Gauss (sans oublier le ε_0 dans le membre de droite).

1.7.6. Tube de champ

Nous allons voir une première application du théorème de Gauss, en se plaçant le long d'un tube de champ introduit plus haut. On supposera qu'on est éloigné de toute distribution de charges.

Par définition, le flux du champ électrique sur la surface latérale d'un tube de champ est nul.

On considère maintenant un tube de champ et deux contours fermés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur lesquels s'appuient les lignes de champ du tube de champ. On notera \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 les surfaces délimitées par les deux contours. On supposera que les lignes de champ sont dirigées de \mathcal{S}_1 vers \mathcal{S}_2 . Le flux du champ électrique à travers la portion de tube de champ délimité par les deux surfaces précédentes s'écrit :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \iint_{M \in \mathcal{S}_1} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}_2} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.71)$$

la dernière égalité étant obtenue par le théorème de Gauss (on a supposé être loin de toute distribution de charges). Par construction, $\Phi_1 < 0$ et $\Phi_2 > 0$. Ainsi, en valeur absolue, le flux du champ électrique est identique sur les deux bases, soit $\Phi_1 = -\Phi_2$. On en déduit alors que :

- ▶ Le flux du champ électrique **se conserve le long d'un tube de champ** loin de toute distribution de charges.
- ▶ Si les lignes de champ **s'évasent** (c'est-à-dire si $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$), alors **la norme du champ électrique décroît** le long du tube de champ.
- ▶ À l'inverse, si les lignes de champ **se resserrent** (c'est-à-dire si $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$), alors **la norme du champ électrique croît** le long du tube de champ.

1.8. Relations de passage du champ électrique (HP)

1.8.1. Discontinuité de la composante normale

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le champ électrique était discontinu à la traversée d'une distribution surfacique de charges. Pour étudier cette discontinuité, considérons une nappe de charges de densité surfacique σ et isolons un élément dS sur cette surface centré sur M . Nous considérons maintenant un cylindre de base dS traversant la surface. Le flux du champ électrique à travers le cylindre s'écrit :

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_l, \quad (1.72)$$

où $d\Phi_{1,2}$ désignent les flux sur les bases, tandis que $d\Phi_l$ désigne le flux latéral. D'après le théorème de Gauss, on a également

$$d\Phi = \frac{\sigma(M)dS}{\epsilon_0}. \quad (1.73)$$

Dans l'hypothèse où la hauteur du cylindre tend vers 0, le flux latéral s'annule. De plus,

$$d\Phi_{1,2} = \pm \mathbf{E}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M)dS, \quad (1.74)$$

où $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M)$ est le vecteur normal unitaire à la surface au point M dirigé de 1 vers 2, et où le signe $-$ pour $d\Phi_1$ est dû au fait que la surface est orientée vers l'extérieur. Ainsi, nous obtenons finalement :

$$[\mathbf{E}_2(M) - \mathbf{E}_1(M)] \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \iff \mathbf{E}_{n,2}(M) - \mathbf{E}_{n,1}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) \quad (1.75)$$

Par conséquent, **la composante normale E_n du champ électrique est discontinue à la traversée d'une distribution surfacique de charges**, et la relation précédente permet alors d'en déduire le lien entre les champs électriques de part et d'autre de la nappe de charges.

1.8.2. Continuité de la composante tangentielle

Nous avons vu que le potentiel électrostatique était continu à la traversée d'une nappe de charges. Considérons 4 points M_1 et N_1 et M_2 et N_2 , proches d'un point M de la surface, tels que $\mathbf{M}_1\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2\mathbf{N}_2 = d\ell(M)$ est tangent à la nappe, tels que M_1 et N_1 sont du même côté de la nappe, et M_2, N_2 du même côté de la nappe, mais pas dans le même demi-espace que M_1 et N_1 . Alors, par continuité du potentiel, si M_1 et M_2 sont rapprochés de la nappe, alors $V(M_1) - V(M_2)$ peut devenir arbitrairement petit. Il en est de même pour $V(N_1) - V(N_2)$. Or :

$$\begin{aligned} V(M_1) - V(N_1) &= V(M_1) - V(M_2) + V(M_2) - V(N_2) + V(N_2) - V(N_1) \\ \mathbf{E}_1(M) \cdot d\ell(M) &= V(M_1) - V(M_2) + \mathbf{E}_2(M) \cdot d\ell(M) + V(N_2) - V(N_1). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Ainsi, quand tous les points se rapprochent de la surface, on obtient :

$$[\mathbf{E}_2(M) - \mathbf{E}_1(M)] \cdot d\ell(M) = 0 \iff \mathbf{E}_{t,2}(M) = \mathbf{E}_{t,1}(M), \quad (1.77)$$

ou encore que la composante tangentielle \mathbf{E}_t du champ électrique est continue à la traversée d'une distribution surfacique de charges.

1.9. Extensions de l'électrostatique

1.9.1. ARQS électrique (HP)

Pour le moment, nous avons insisté sur le fait qu'on se plaçait dans un régime permanent où les distributions de charges ne dépendaient pas du temps. En réalité, la théorie de l'électrostatique peut être appliquée également quand les distributions de charges dépendent du temps, à condition de se placer dans le cadre de l'**Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) électrique**.

Il existe une autre ARQS, dite magnétique, qui intervient en électrocinétique, et aussi pour l'induction.

Nous allons supposer qu'on observe une distribution de charges $\rho(P, t)$ à une distance typique L et que cette distribution varie sur un temps caractéristique τ . Si on veut appliquer la théorie de l'électrostatique, on doit pouvoir négliger **tout phénomène de propagation**, autrement dit, on doit pouvoir considérer que le temps nécessaire pour que l'information se propage (à la vitesse de la lumière c dans le vide) est très faible devant le temps typique de variation de la source, soit

$$\frac{L}{\tau c} \ll 1. \quad (1.78)$$

Cette condition est la condition de base de l'ARQS. Maintenant, se placer dans le cadre de l'ARQS électrique revient à dire que même si les distributions de charges dépendent du temps, et créent donc un champ magnétique, **le système doit être à dominance électrique**, soit

$$\frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}c} \ll 1, \quad (1.79)$$

où on a noté $\tilde{\rho}$ l'ordre de grandeur typique de la densité volumique de charges, et \tilde{j} l'ordre de grandeur typique de la densité volumique de courants (voir le cours de magnétostatique).

Le champ magnétique est, quant à lui, calculé en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, qui s'écrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(M, t) = \mu_0 \mathbf{j}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M, t), \quad (1.80)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (voir le cours de magnétostatique).

1.9.2. Électrostatique dans les milieux isolants (HP)

Lorsque le champ électrique pénètre dans un milieu isolant, les nuages électroniques des atomes sont déformés et leurs centres de gravité se décalent de manière opposée au champ électrique. Localement sont donc créés des moments dipolaires électriques (voir chapitre suivant), ce qui revient à dire que le matériau porte une distribution volumique de charges liées (car attachées aux noyaux et incapables de se déplacer sur des distances macroscopiques). Dans certains cas, le matériau peut déjà présenter des dipôles électriques, et ces derniers s'orientent alors selon la direction et le sens du champ électrique extérieur.

On peut alors montrer que la prise en compte de cette nouvelle distribution de charges revient à remplacer dans l'équation de Maxwell-Gauss ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité diélectrique relative du matériau, qui est une grandeur adimensionnée. Ainsi, dans un milieu diélectrique, les équations de Maxwell pour l'électrostatique se réécrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(M, t) &= \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \\ \nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.81)$$

où la distribution de charges ρ ne décrit que les charges libres (soit toutes les charges sauf celles induites par le champ électrique dans le milieu diélectrique).

On peut montrer que le champ électrique créé par un matériau diélectrique de polarisation \mathbf{P} est équivalent à celui créé par la superposition d'une distribution volumique de charges liées de densité $\rho_l = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ et d'une distribution surfacique de charges de densité $\sigma_l = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du matériau. En réinjectant cette expression dans l'Éq. (1.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho + \rho_l}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.82)$$

tandis que l'Éq. (1.42) est inchangée. On introduit alors le vecteur excitation électrique $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \varepsilon_0\mathbf{E}$ de sorte que l'Éq. (1.44) se réécrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(M, t) = \rho(M, t). \quad (1.83)$$

On a simplifié le problème des charges liées, mais au prix d'avoir introduit un autre champ vectoriel \mathbf{D} . Le problème admet donc plus d'inconnues (les trois composantes de \mathbf{E} et les trois composantes de \mathbf{D}) que d'équations (au nombre de trois, une donnée par l'Éq. (1.83) et deux données par l'Éq. (1.42)^a), et pour pouvoir le résoudre, il faut se donner une **relation phénoménologique** (tirée de l'expérience, et pas fondamentale comme les équations de Maxwell) pour modéliser le matériau diélectrique. Dans le cas de matériaux diélectriques **linéaires, homogènes et isotropes** (comme en optique ondulatoire par exemple), on suppose que la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{E} est linéaire, scalaire et vraie en tout point de l'espace :

$$\mathbf{P}(M, t) = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}(M, t), \quad (1.84)$$

où χ_e est une constante constitutive du matériau qu'on appelle la susceptibilité diélectrique. On obtient alors $\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$, en notant $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, ce qui nous permet d'obtenir l'Éq. (1.81) à partir de l'Éq. (1.83).

^a. Bien que cette équation soit vectorielle et donne a priori trois équations scalaires, seules deux d'entre-elles sont indépendantes.

Attention, le système d'équations (1.81) est vrai uniquement en électrostatique, ou dans le cadre de l'ARQS électrique. Dans le cas général, l'Éq. (1.84) est vraie dans le domaine fréquentiel (c'est-à-dire en considérant les transformées de Fourier de \mathbf{P} et \mathbf{E}) et fait intervenir un tenseur d'ordre 2 (matrice 3x3) qui varie spatialement et qui dépend de la fréquence. On préfère alors garder l'Éq. (1.83) et l'équation de Maxwell-Faraday faisant intervenir la dérivée temporelle du champ magnétique.

La valeur de ϵ_r dépend du matériau, par exemple $\epsilon_r \simeq 80$ pour l'eau.

Les relations de passage à la traversée des distributions surfaciques sont modifiées en présence d'un milieu diélectrique, et s'écrivent dans le cadre de l'ARQS électrique :

- la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de la distribution surfacique :

$$\mathbf{E}_{t,2}(M, t) = \mathbf{E}_{t,1}(M, t), \tag{1.85}$$

- la composante normale du champ électrique est discontinue :

$$\epsilon_{r,2} \mathbf{E}_{n,2}(M, t) - \epsilon_{r,1} \mathbf{E}_{n,1}(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M). \tag{1.86}$$

Par ailleurs, en dehors de l'ARQS électrique, la relation pour la composante tangentielle de \mathbf{E} est inchangée, tandis que celle sur la composante normale fait maintenant intervenir l'excitation électrique \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}_{n,2}(M, t) - \mathbf{D}_{n,1}(M, t) = \sigma(M, t) \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M). \tag{1.87}$$

1.9.3. Analogie avec la gravitation

Comme mentionné précédemment, les forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique sont toutes deux des forces newtoniennes. Une correspondance formelle peut être faite en analysant les expressions des forces dans les deux cas :

$$F_{e,1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^3}, \quad F_{g,1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^3}, \tag{1.88}$$

soit finalement les équivalences données dans le Tab. 1.1.

Grandeur	Électrostatique	Gravitation
Charge	q	m
Constante universelle	ϵ_0	$-\frac{1}{4\pi \mathcal{G}}$
Champ	$\mathbf{E}(M)$	$\mathbf{g}(M)$
Force	$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$	$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$
Potentiel	$V(M)$	$\phi(M)$
Énergie potentielle	$E_e = qV(M)$	$E_g = m\phi(M)$
Distribution de charges	$\rho(M)$	$\rho_m(M)$

TABLE 1.1. – Équivalences formelles entre l'électrostatique et la gravitation.

Toutes les propriétés présentées pour le champ électrique se transposent donc, moyennant les correspondances précédentes, à la gravitation, par exemple :

- le théorème de Gauss pour une distribution de masses :

$$\oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{g}(M) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}, \tag{1.89}$$

où M_{int} désigne la masse intérieure dans le volume délimité par la surface \mathcal{S} .

- ▶ le lien avec le potentiel gravitationnel :

$$\mathbf{g}(M) = -\nabla\phi(M) \quad (1.90)$$

- ▶ la loi de Coulomb pour une distribution volumique de masses Σ :

$$\mathbf{g}(M) = -\mathcal{G} \iiint_{P \in \Sigma} \rho_m(P) \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV. \quad (1.91)$$

Il existe cependant quelques différences entre la théorie de la gravitation et celle de l'électrostatique :

- ▶ Les masses sont toujours positives, et la notion d'antisymétrie n'est donc plus pertinente.
- ▶ La gravitation ne fait intervenir que des interactions attractives.
- ▶ Les lois obtenues pour la gravitation restent valables même en présence de distributions de masses qui varient au cours du temps, tant que les effets relativistes peuvent être négligés. En relativité générale, il existe l'équivalent de l'équation du champ magnétique, appelé le champ gravitomagnétique.
- ▶ Il n'y a aucune notion de conducteur ou d'isolant pour la gravitation.

2. Le dipôle électrostatique

2.1. Propriétés électrostatiques du dipôle

2.1.1. Définition

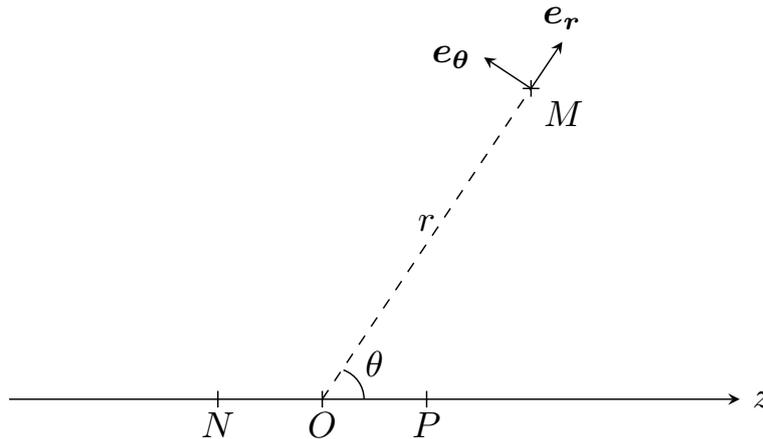


FIGURE 2.1. – Schéma du dipôle et système de coordonnées associé.

Un dipôle électrostatique est un ensemble de deux charges opposées $-q$ et $+q$ (avec $q > 0$) placées en deux points N et P respectivement, tels que $\mathbf{NP} = d\mathbf{e}_z$ (ceci définit l'axe \mathbf{e}_z , voir Fig. 2.1). On caractérise alors le dipôle par son moment dipolaire

$$\mathbf{p} = q\mathbf{NP}. \quad (2.1)$$

La norme du moment dipolaire s'exprime alors en C·m dans les unités du système international. En pratique, étant donné que les distances et charges mises en jeu sont souvent de l'ordre de l'Å et de la charge électrique élémentaire respectivement, on préfère utiliser comme unité le Debye (D), qui est telle que $1 \text{ D} = 3,335\,64 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Les valeurs usuelles de moment dipolaire sont alors comprises entre 0 et 11 D.

Le Debye est défini comme étant le moment dipolaire de deux charges opposées de 10^{-18} statcoulomb séparées de 1 Å, où $1 \text{ statcoulomb} = \frac{0,1}{c} \text{ A}\cdot\text{m}$, avec c la célérité de la lumière dans le vide.

2.1.2. Calcul du potentiel électrostatique

Nous allons utiliser le théorème de superposition et ajouter les potentiels créés par chacune des deux charges. Pour un point M quelconque, le plan contenant M et l'axe du dipôle est plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Ainsi, le champ électrique est contenu dans ce plan. On peut donc se placer dans une base polaire de centre O , le milieu de N et P . Le potentiel se calcule donc par la relation :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{NM}\|}. \quad (2.2)$$

Les distances dans la relation précédente sont obtenues par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\|PM\| &= \|PO + OM\| = \left\| -\frac{d}{2}\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_r \right\| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos \theta}, \\ \|NM\| &= \|NO + OM\| = \left\| \frac{d}{2}\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_r \right\| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + dr \cos \theta}\end{aligned}\quad (2.3)$$

soit en réinjectant dans le potentiel :

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + dr \cos \theta}} \right]. \quad (2.4)$$

Nous allons nous contenter du potentiel à grande distance, c'est-à-dire dans le cas où $r \gg d$. Dans ce cas on peut faire un développement limité de l'expression précédente au second ordre en d/r . Pour cela, on rappelle qu'un développement à l'ordre 2 de $(1+x)^\alpha$ est :

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3). \quad (2.5)$$

On obtient alors, en utilisant la formule précédente ($\alpha = -1/2$), par exemple pour le premier terme de l'Éq. (2.4) :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos \theta}} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cos \theta \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cos \theta \right]^2. \quad (2.6)$$

En ne gardant que les termes d'ordre inférieur à 2 dans l'expression précédente, pour être cohérent, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - dr \cos \theta}} &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r} \cos \theta \right] + \frac{3}{8} \left[-\frac{d}{r} \cos \theta \right]^2 \\ &= 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos^2 \theta \\ &= 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1)\end{aligned}\quad (2.7)$$

L'autre terme de l'Éq. (2.4) s'obtient aisément, en faisant la substitution $d \rightarrow -d$ dans l'équation précédente, soit :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + dr \cos \theta}} = 1 - \frac{d}{2r} \cos \theta + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (2.8)$$

En combinant les Éq. (2.4), (2.7) et (2.8), l'expression du potentiel, au plus petit ordre non nul, s'écrit :

$$V(r, \theta) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.9)$$

Cette expression peut se mettre sous forme **intrinsèque**, c'est-à-dire sous une forme indépendante du système de coordonnées, en notant que $p \cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/r$:

$$V(M) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}, \quad (2.10)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$.

Contrairement au potentiel créé par une charge ponctuelle, qui décroît en $1/r$, le potentiel électrostatique créé par un dipôle décroît en $1/r^2$. De plus, ce potentiel est **anisotrope** car il dépend de la direction de l'espace dans laquelle on regarde le dipôle : il ne dépend pas uniquement de r mais également de $\cos \theta$.

Le potentiel électrostatique (et de fait le champ électrique) dépend uniquement de la variable p , et non pas séparément des variables q et d .

2.1.3. Calcul du champ électrique

En partant du potentiel, on peut calculer le champ électrique à partir de la relation $\mathbf{E}(M) = -\nabla V(M)$, soit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} E_r(r, \theta) &= -\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour obtenir une relation intrinsèque, il faut exprimer \mathbf{e}_θ en fonction de \mathbf{e}_z . Pour cela, on utilise la relation :

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (2.12)$$

ainsi le champ électrique devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta) &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\mathbf{e}_z + \cos \theta \mathbf{e}_r), \\ &= \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \mathbf{e}_r - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.13)$$

soit de façon intrinsèque :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^5}. \quad (2.14)$$

Contrairement au champ créé par une charge ponctuelle, qui décroît en $1/r^2$, le champ électrostatique créé par un dipôle décroît en $1/r^3$.

On peut vérifier par un calcul direct en coordonnées sphériques que le champ électrique créé par le dipôle vérifie les équations de Maxwell, à savoir que $\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$ et que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

2.1.4. Diagramme de rayonnement

Nous souhaitons représenter les équipotentielles et les lignes de champ électrique du dipôle (voir Fig. 2.2).

On rappelle que les équipotentielles correspondent aux surfaces de potentiel constant. Il existe une équipotentielle simple, celle de potentiel nul, qui correspond au plan médiateur du dipôle, c'est-à-dire le plan passant par O (le milieu de N et P) et orthogonal à \mathbf{p} . De manière générale, les équipotentielles se calculent en coordonnées polaires par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{p \cos \theta}{r(\theta)^2} &= \text{Cste} \\ r(\theta)^2 &= A \cos \theta \end{aligned}, \quad (2.15)$$

où A est une constante. Cette équation correspond à une courbe paramétrique donnant une équipotentielle en coordonnées polaires. Il existe une infinité d'équipotentiels, chacune étant caractérisée par une valeur du potentiel, ou de manière équivalente par une valeur de la constante A . Donnons quelques propriétés de ces équipotentiels :

- ▶ Quand $A \rightarrow \pm\infty$, on trouve que l'équation de l'équipotentielle devient $\theta = \pm\pi/2$ (pour annuler le cosinus et empêcher la divergence de $r(\theta)$) : on retrouve l'équipotentielle, de potentiel nul, qui correspond au plan médiateur du dipôle.
- ▶ Les équipotentiels ont une symétrie de révolution par rapport à l'axe du dipôle : en particulier $r(-\theta) = r(\theta)$.
- ▶ Comme deux équipotentiels ne peuvent pas se croiser, les équipotentiels sont constitués de deux lobes définis sur $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ($A_1 > 0$) et sur $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ ($A_2 < 0$) respectivement, avec $A_2 = -A_1$.
- ▶ $r(\pm\pi/2) = 0$: toutes les équipotentiels semblent passer par le milieu O de N et P . Ceci n'est pas le cas en réalité, car il faut se souvenir que le calcul du potentiel n'est valable qu'à grande distance devant l'écartement entre les charges.
- ▶ Les équipotentiels sont les plus éloignées du dipôle sur l'axe de celui-ci : la fonction $r(\theta)$ est maximale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

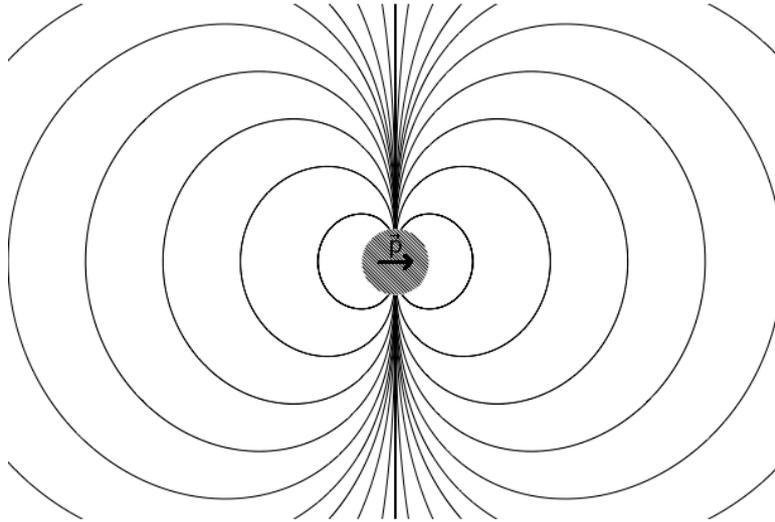


FIGURE 2.2. – Équipotentiels du dipôle électrostatique, en coupe selon un plan contenant le dipôle. Extrait de Wikipedia.

Pour le tracé des lignes de champ (voir Fig. 2.3), on peut les obtenir d'une part en traçant les courbes orthogonales aux équipotentiels. On peut, sinon, les obtenir directement à partir de l'expression du champ électrique. Pour cela, on utilise le fait qu'un élément $d\ell(M)$ est tangent à une ligne de champ s'il est colinéaire au champ électrique en ce point, soit :

$$\begin{aligned}
 d\ell(M) \wedge \mathbf{E}(M) &= \mathbf{0}. \\
 [dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta] \wedge [E_r\mathbf{e}_r + E_\theta\mathbf{e}_\theta] &= \mathbf{0} \\
 drE_\theta - r d\theta E_r &= 0 \\
 dr \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} - r d\theta \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} &= 0 \\
 \frac{dr}{r} - \frac{2d\theta \cos \theta}{\sin \theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

En faisant passer le second terme dans le membre de droite, puis en intégrant membre à membre, on

obtient :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} = 2 \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \frac{\cos \theta'}{\sin \theta'}$$

$$[\ln r']_{r_0}^r = 2 [\ln |\sin \theta'|]_{\theta_0}^{\theta} \quad . \quad (2.17)$$

$$\ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \text{Cste}$$

En passant à l'exponentielle, on peut écrire l'équation d'une ligne de champ sous la forme :

$$r(\theta) = B \sin^2 \theta, \quad (2.18)$$

où B est une constante réelle positive. Tout comme les équipotentielles, il existe une infinité de lignes de champ, chacune paramétrée par une valeur de B . Nous donnons maintenant quelques propriétés de ces lignes de champ :

- ▶ Les lignes de champ divergent de la charge positive, et convergent vers la charge négative.

Les lignes de champ du dipôle peuvent d'ailleurs être obtenues par théorème de superposition en traçant les lignes de champ pour une charge négative seule dans l'espace puis pour une charge positive seule dans l'espace.

- ▶ Quand $B \rightarrow +\infty$, on trouve que l'équation de la ligne de champ se réduit à $\sin \theta = 0$, soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. On trouve alors deux lignes de champ, qui correspondent à l'axe du dipôle : l'une diverge de la charge positive vers l'infini, l'autre converge de l'infini vers la charge négative.

Il existe également une autre ligne de champ sur l'axe, qui diverge de la charge positive pour converger vers la charge négative. Néanmoins, cette dernière n'est pas décrite par l'équation précédente, car l'expression du champ électrique n'est valable qu'à grande distance devant l'écartement entre les deux charges.

- ▶ Les lignes de champ sont symétriques par rotation autour de l'axe du dipôle, en particulier $r(-\theta) = r(\theta)$.
- ▶ Les lignes de champ semblent toutes converger vers le point O quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Cela n'est pas le cas en pratique, là encore, car l'expression du champ n'est plus valable quand r devient de l'ordre de la distance entre les charges. En effet, en O , le champ électrique est bien défini (voir le premier point).
- ▶ les lignes de champ sont les plus éloignées de l'axe quand $\theta = \pm\pi/2$.

2.2. Actions mécaniques sur un dipôle

2.2.1. Cas d'un champ électrique uniforme

Expression de la force et du moment

On considère tout d'abord le dipôle de moment dipolaire $\mathbf{p} = q\mathbf{NP}$ plongé dans un champ électrique \mathbf{E}_0 uniforme dans l'espace. Pour calculer la force subie par ce dipôle, il suffit de sommer les forces subies par chacune des charges dans le champ électrostatique \mathbf{E}_0 .

Les forces exercées par une charge sur l'autre sont des forces internes au système et ne doivent pas être considérées pour étudier la dynamique du dipôle. C'est pour cela que nous nous restreignons aux forces extérieures.

Nous obtenons donc :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + (-q\mathbf{E}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

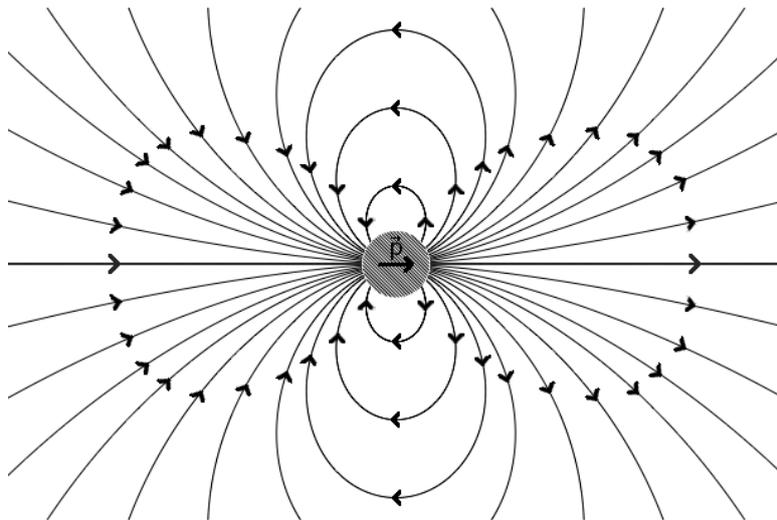


FIGURE 2.3. – Lignes du champ électrique du dipôle, en coupe selon un plan contenant le dipôle. Extrait de Wikipedia.

Quand on calcule les actions subies par un dipôle électrostatique dans un champ électrique, on ne doit considérer que le champ électrique **extérieur**, et non pas le champ total régnant dans l'espace, qui est la somme du champ extérieur et du champ créé par le dipôle (donné par l'Éq. (2.14)).

Nous pouvons aussi calculer le moment des forces résultant sur le dipôle en un point A quelconque de l'espace :

$$\mathcal{M}_A = \mathbf{AP} \wedge (q\mathbf{E}_0) + \mathbf{AN} \wedge (-q\mathbf{E}_0) = q(\mathbf{AP} - \mathbf{AN}) \wedge \mathbf{E}_0 = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_0. \quad (2.20)$$

Nous trouvons ainsi que le moment de couple subi par un dipôle dans un champ uniforme est **non nul et indépendant du point de l'espace**. Nous pouvons donc donner quelques propriétés de ce moment de couple :

- ▶ Il est nul si le champ électrique est colinéaire à \mathbf{p} .
- ▶ Plus généralement, si on note θ l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{E}_0 , alors on obtient que $\mathcal{M}_A = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{E}_0\| \sin \theta \mathbf{n}$, où \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire orthogonal au plan formé par \mathbf{p} et \mathbf{E}_0 tel que le trièdre $(\mathbf{p}, \mathbf{E}_0, \mathbf{n})$ soit direct.
- ▶ Le moment de couple est maximal quand \mathbf{E}_0 est orthogonal au moment du dipôle.

Dynamique du dipôle dans le champ uniforme

Par la suite, nous supposons que le dipôle ne subit que les actions exercées par le champ \mathbf{E}_0 . Nous avons vu précédemment que la force extérieure résultante subie par le dipôle était nulle. Par conséquent, si on applique le théorème du centre d'inertie au dipôle dans un référentiel galiléen, nous obtenons que son accélération est nulle, et on peut donc le considérer au repos : **le dipôle n'a aucun mouvement global dans un champ électrique uniforme**.

Dans la suite de ce paragraphe, nous notons $\mathbf{E}_0 = \|\mathbf{E}_0\| \mathbf{e}_x$, et nous supposons que le moment dipolaire est écarté d'un angle θ de l'axe \mathbf{e}_z . L'effet du moment de couple créé par \mathbf{E}_0 peut se comprendre si on considère les deux charges comme des points matériels de masses m_N et m_P reliés par une tige sans masse. Nous notons $J = (m_N + m_P)(d/2)^2$ le moment d'inertie du dipôle selon l'axe (Oy) , et nous appliquons le théorème du moment cinétique au point O dans un référentiel galiléen (par exemple le référentiel barycentrique) en projection selon l'axe (Oy) :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_O \cdot \mathbf{e}_y = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{E}_0\| \sin \theta. \quad (2.21)$$

Les positions d'équilibre du dipôle sont obtenues quand le moment de couple (le membre de droite de l'équation précédente) s'annule, c'est-à-dire quand $\sin \theta = 0$, soit $\theta = 0 [2\pi]$ ou $\theta = \pi [2\pi]$. Le dipôle a donc deux positions d'équilibre qui correspondent respectivement aux cas où il est **aligné ou anti-aligné** avec le champ électrostatique. Il est aisé de se rendre compte (il suffit de faire un dessin avec les forces en présence) que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre **stable**, tandis que $\theta = \pi$ correspond à une position d'équilibre **instable**.

On retiendra donc que **le champ uniforme ne déplace pas macroscopiquement un dipôle, mais tend à l'aligner suivant ses lignes de champ.**

2.2.2. Cas d'un champ électrique non uniforme

Expression de la force

Dans ce second cas, on suppose que le champ électrique extérieur $\mathbf{E}_0(M)$ dépend maintenant du point M de l'espace. La force totale subie par le dipôle s'exprime maintenant :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0(P) + (-q\mathbf{E}_0(N)) = q(\mathbf{E}_0(P) - \mathbf{E}_0(N)). \quad (2.22)$$

On introduit une base cartésienne de sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0(M) = E_{0,x}(x, y, z)\mathbf{e}_x + E_{0,y}(x, y, z)\mathbf{e}_y + E_{0,z}(x, y, z)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{NP} = \Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y + \Delta z\mathbf{e}_z \end{cases}. \quad (2.23)$$

On se concentre sur une composante de la force (par exemple F_x), et on note (x, y, z) les coordonnées de O . On obtient alors :

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_{0,x}(P) - E_{0,x}(N)) \\ &= q[E_{0,x}(x + \Delta x/2, y + \Delta y/2, z + \Delta z/2) - E_{0,x}(x - \Delta x/2, y - \Delta y/2, z - \Delta z/2)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

On suppose ensuite que la distance typique de variation du champ électrique dans l'espace est grande devant $d = \|\mathbf{NP}\|$. On peut donc se contenter d'un développement limité au premier ordre en d , et on obtient :

$$\begin{aligned} F_x &= q \left[\Delta x \frac{\partial E_{0,x}}{\partial x}(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y}(x, y, z) + \Delta z \frac{\partial E_{0,x}}{\partial z}(x, y, z) \right] \\ &= p_x \frac{\partial E_{0,x}}{\partial x}(x, y, z) + p_y \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y}(x, y, z) + p_z \frac{\partial E_{0,x}}{\partial z}(x, y, z) \end{aligned}, \quad (2.25)$$

ce que l'on peut noter sous la forme :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0(O), \quad (2.26)$$

où $\mathbf{p} \cdot \nabla$ est l'opérateur vectoriel qui s'écrit en **coordonnées cartésiennes** :

$$\mathbf{p} \cdot \nabla = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Dans les autres systèmes de coordonnées (polaires, cylindriques, sphériques), l'expression de l'opérateur $\mathbf{p} \cdot \nabla$ est beaucoup plus complexe.

Dans le cas où le champ est uniforme, on retrouve bien que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. De plus, le champ électrique à considérer pour calculer la force dans l'Éq. (2.26) est toujours uniquement le champ extérieur, et non pas le champ total qui est la somme du champ extérieur et du champ créé par le dipôle.

On peut donner une expression simplifiée de la force exercée sur **un dipôle permanent en électrostatique**, c'est-à-dire dans le cas où la distribution de charges qui génère $\mathbf{E}_0(M)$ est indépendante du temps. Dans ce cas, le champ $\mathbf{E}_0(M)$ est à circulation conservative, ce qui localement s'écrit $\nabla \wedge \mathbf{E}_0(M) = \mathbf{0}$. En utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on trouve par exemple que :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{0,x}}{\partial z} = \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} \end{cases}, \quad (2.28)$$

ce qui donne pour la composante F_x de la force :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_{0,x}}{\partial x}(x, y, z) + p_y \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x}(x, y, z) + p_z \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x}(x, y, z). \quad (2.29)$$

Si on suppose que le dipôle est permanent, c'est-à-dire que \mathbf{p} est indépendant du champ électrique extérieur \mathbf{E}_0 , alors :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (p_x E_{0,x}(x, y, z) + p_y E_{0,y}(x, y, z) + p_z E_{0,z}(x, y, z)), \quad (2.30)$$

soit finalement :

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0(O)). \quad (2.31)$$

Nous rappelons que cette formule ne doit être utilisée que si \mathbf{p} est indépendant de \mathbf{E}_0 , et que si \mathbf{E}_0 est à circulation conservative (en électrostatique). Pour deux charges ponctuelles séparées d'une distance d , la première condition est vérifiée. Par contre, dans le cas d'un moment dipolaire induit (par exemple lors du déplacement des nuages électroniques des molécules sous l'effet d'un champ électrique), cette condition n'est plus vérifiée, et il faut revenir à l'Éq. (2.26).

Expression du moment de couple

Nous adaptons le raisonnement précédent au calcul du moment de couple. On se contente de le calculer au point O , car il peut être obtenu en tout point A quelconque en utilisant la formule de composition :

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_O + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{F}, \quad (2.32)$$

où \mathbf{F} est donnée par l'Éq. (2.26). Au point O , le moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_O &= \mathbf{OP} \wedge (q\mathbf{E}_0(P)) + \mathbf{ON} \wedge (-q\mathbf{E}_0(N)) \\ &= q(\mathbf{OP} \wedge \mathbf{E}_0(P) + \mathbf{NO} \wedge \mathbf{E}_0(N)) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{p} \wedge [\mathbf{E}_0(P) + \mathbf{E}_0(N)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ainsi, au plus petit ordre non nul en $d = \|\mathbf{NP}\|$, on retrouve la même expression que dans le cas uniforme, **mais uniquement au point O** , à savoir :

$$\mathcal{M}_O = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_0(O). \quad (2.34)$$

Cette expression est valable en toute généralité, que le moment dipolaire soit permanent ou induit, et même lorsque le champ électrique est variable dans le temps.

Expression de l'énergie potentielle

En utilisant l'Éq. (2.31), on constate que la force électrique subie par le dipôle s'écrit comme le gradient d'une quantité dans le cas d'un dipôle permanent en électrostatique. Cette force est donc conservative, et dérive de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ :

$$E_{p,e} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0(O). \quad (2.35)$$

Tout comme l'Éq. (2.31), cette énergie potentielle n'est a priori définie que pour un moment dipolaire permanent, et dans le cas où le champ électrique est à circulation conservative.

Le champ uniforme est un cas particulier de champ conservatif (même s'il dépend du temps). Dans ce cas, en multipliant l'Éq. (2.21) par $d\theta/dt$ et en intégrant, on retrouve l'expression de l'énergie potentielle donnée par l'Éq. (2.35).

Dynamique du dipôle dans un champ non uniforme

Dans le cas d'un champ non uniforme, le dipôle tend toujours à **s'aligner le long des lignes de champ du champ électrique**. De plus, dans l'hypothèse où le dipôle est effectivement aligné avec le champ, l'expression de la force montre qu'elle pointe vers les zones de champ fort, ainsi le dipôle est **déplacé macroscopiquement par le champ extérieur vers les zones de champ intense**.

Ces résultats se retrouvent à partir de l'énergie potentielle, quand cette dernière est définie. En effet, en notant θ l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{E}_0 , on trouve que $E_{p,e} = -\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{E}_0\| \cos \theta$. Un système évolue de façon générale de telle sorte à minimiser son énergie potentielle : cela est obtenu en prenant $\theta = 0$, et en maximisant la norme du champ électrique.

2.2.3. Explication de la solvatation

Les paragraphes précédents nous permettent d'expliquer qualitativement le phénomène de solvatation. Imaginons qu'on plonge un cristal ionique en solution. Les ions créent alors un champ électrique intense qui attire les dipôles présents dans le solvant autour d'eux. Il y a donc une attraction entre les dipôles du solvant et le soluté. Si cette interaction est supérieure à l'énergie de cohésion du cristal, alors le cristal se dissout, et les ions peuvent se disperser.

Ce mécanisme est plus efficace quand le solvant présente des dipôles permanents (solvant polaire). Ceci explique pourquoi les solvants polaires dissolvent bien les composés ioniques. Par contre, ce mécanisme est peu efficace quand le solvant est apolaire, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de dipôle permanent. Les ions peuvent induire des dipôles dans le solvant, mais l'attraction qui en résulte est beaucoup plus faible. Ceci explique pourquoi les solides ioniques sont peu solubles dans les solvants apolaires.

2.3. Approximation dipolaire des distributions de charges (HP)

Bien que le problème du dipôle électrostatique peut sembler académique, il est en réalité très important, car de nombreuses distributions de charge peuvent, en première approximation, être assimilées à un dipôle quand elles sont vues à grande distance devant leur taille typique. Dans la suite, on considère une distribution volumique de charges ρ sur un domaine Σ de taille typique L . Nous allons supposer que cette distribution est électriquement neutre, c'est-à-dire que :

$$\iiint_{P \in \Sigma} \rho(P) dV = 0. \quad (2.36)$$

Nous allons maintenant nous intéresser au potentiel créé à grande distance devant L par la distribution, donné par la formule de Coulomb :

$$V(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{PM}\|} dV. \quad (2.37)$$

Nous allons alors introduire un point O « au centre » de la distribution. Par la relation de Chasles, on obtient alors :

$$\|\mathbf{PM}\| = \|\mathbf{PO} + \mathbf{OM}\| = \sqrt{\mathbf{PO}^2 + \mathbf{OM}^2 + 2\mathbf{PO} \cdot \mathbf{OM}}. \quad (2.38)$$

Comme mentionné précédemment, nous allons regarder la distribution à grande distance, c'est-à-dire dans l'hypothèse où $\|\mathbf{OM}\| \gg L$. Comme pour tout point P , $\|\mathbf{OP}\| \sim L$, un développement limité de l'équation précédente donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{PM}\| &= \|\mathbf{OM}\| \sqrt{1 + 2 \frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|} + \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2} \\ &= \|\mathbf{OM}\| \left[1 + \frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|} + \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(2 \frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 \right] \\ &= \|\mathbf{OM}\| \left[1 + \frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|} + \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

au deuxième ordre en $L/\|\mathbf{OM}\|$. Ainsi, on obtient pour le développement limité de l'inverse :

$$\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{OM}\|} \left[1 - \frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|} - \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{PO}}{\|\mathbf{OM}\|} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}\right)^2 \right]. \quad (2.40)$$

En réinjectant ceci dans l'expression du potentiel, nous obtenons, au premier ordre en $L/\|\mathbf{OM}\|$:

$$V(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{OM}\|} - \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P) \mathbf{PO} \cdot \mathbf{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{OM}\|^3}. \quad (2.41)$$

Le premier terme est nul car la distribution est globalement non chargée. Le potentiel s'écrit donc :

$$V(M) = \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P) \mathbf{OP} \cdot \mathbf{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{OM}\|^3} dV = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{OM}\|^3}. \quad (2.42)$$

On reconnaît donc l'expression du potentiel créé par le dipôle de moment dipolaire :

$$\mathbf{p} = \iiint_{P \in \Sigma} \rho(P) \mathbf{OP} dV. \quad (2.43)$$

Ainsi, on trouve qu'à grande distance d'une source globalement neutre, le potentiel électrique (et donc le champ) est celui d'un dipôle. Comme la matière est globalement neutre, ce cas représente la majorité des cas rencontrés en pratique.

Évidemment, ce résultat n'est valable que si $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Si le moment dipolaire est nul, il faut poursuivre le développement aux ordres supérieurs (quadrupolaire, etc.).

En travaux dirigés, nous avons vu que si la distribution présentait une charge totale Q_{tot} non nulle, alors à grande distance devant la taille typique de la distribution, on pouvait assimiler le champ et le potentiel qu'elle générerait à ceux créés par une charge ponctuelle située au barycentre des charges et de charge Q_{tot} .

2.4. Moment dipolaire des molécules et actions entre dipôles

2.4.1. Les différents types de dipôles

Moment dipolaire permanent

Certaines molécules présentent un **moment dipolaire permanent**, c'est-à-dire un moment dipolaire non nul quand elles se trouvent dans le vide en l'absence de tout champ électrique. Ce moment dipolaire provient de leur asymétrie, et du fait qu'elles sont constituées d'atomes de différentes électronégativités : l'un des atomes a tendance à davantage attirer les nuages électroniques, de sorte que le barycentre des charges négatives est décalé par rapport à celui des charges positives.

C'est le cas de molécules telles que le chlorure d'hydrogène HCl ($\|\mathbf{p}\| = 1,08 \text{ D}$), l'eau H₂O ($\|\mathbf{p}\| = 1,85 \text{ D}$) ou encore l'ammoniac NH₃ ($\|\mathbf{p}\| = 1,5 \text{ D}$). Par contre, les molécules comme le diazote N₂, le dioxygène O₂ et le dioxyde de carbone CO₂ ne présentent pas de moment permanent.

Moment dipolaire induit

Même si certaines molécules ne présentent pas de moment dipolaire permanent, elles peuvent acquérir un moment de dipôle induit, quand elles sont soumises à un champ électrique. En effet, dans ce cas, les noyaux sont déplacés dans le sens du champ électrique tandis que les électrons sont déplacés en sens opposé. Ainsi, les barycentres des charges positives et des charges négatives sont séparés, et la molécule acquiert un moment dipolaire non nul. Empiriquement, on trouve qu'**à faible champ, et pour des molécules suffisamment symétriques,**

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (2.44)$$

où α est la **polarisabilité**, s'exprimant en C²·m²·J⁻¹ ou en J·m²·V⁻² dans les unités du système international.

Pour des molécules peu symétriques, la polarisabilité α devient une matrice, et donc le moment dipolaire induit n'est pas colinéaire au champ électrique dans le cas général.

Cette relation peut être obtenue à partir d'un modèle simple de l'atome (modèle de Thomson, voir TD).

Une molécule présentant un moment dipolaire permanent peut aussi acquérir un moment dipolaire induit dans un champ électrique par le même mécanisme, et les deux moments s'ajoutent alors.

La polarisabilité de l'eau H₂O vaut $\alpha = 1,61 \times 10^{-40} \text{ J}\cdot\text{m}^2\cdot\text{V}^{-2}$, celle du dioxyde de carbone CO₂ vaut $\alpha = 3,24 \times 10^{-40} \text{ J}\cdot\text{m}^2\cdot\text{V}^{-2}$.

2.4.2. Actions entre dipôles

Interaction de Keesom entre dipôles permanents

Nous considérons deux dipôles permanents \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 aux positions M_1 et M_2 respectivement. Chaque molécule interagit avec le champ créé par l'autre, de sorte que l'énergie d'interaction totale s'écrit, en vertu de l'Éq. (2.35) :

$$E_{p,e} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(M_1) = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(M_2) = -\frac{1}{2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(M_1) + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(M_2)), \quad (2.45)$$

où E_i est le champ créé par le dipôle \mathbf{p}_i . En utilisant la première égalité, ainsi que l'expression du champ créé par un dipôle, on aboutit à :

$$E_{p,e} = -\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) - r^2(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^5}, \quad (2.46)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$. On s'attend donc à ce que l'énergie potentielle varie comme $1/r^3$, où $r = \|\mathbf{r}\|$. Cependant, cette énergie potentielle est l'énergie d'interaction instantanée et dépend de l'orientation entre les deux dipôles, ainsi que de l'écart angulaire entre les dipôles et le vecteur position entre les deux molécules

Donnons quelques valeurs particulières de $E_{p,e}$ dans le cas où le dipôle \mathbf{p}_1 est colinéaire au vecteur position \mathbf{r} entre les deux molécules, et de même sens :

- ▶ Si les deux dipôles sont colinéaires et de même sens, alors :

$$E_{p,e} = -\frac{\|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\|}{2\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}. \quad (2.47)$$

- ▶ Si les deux dipôles sont orthogonaux, alors :

$$E_{p,e} = 0. \quad (2.48)$$

- ▶ Si les deux dipôles sont anti-colinéaires, alors :

$$E_{p,e} = \frac{\|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\|}{2\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}. \quad (2.49)$$

De la même manière, si les deux vecteurs sont orthogonaux à \mathbf{r} alors :

$$E_{p,e} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}, \quad (2.50)$$

qui varie entre $-\frac{\|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\|}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}$ et $\frac{\|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\|}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}$ selon l'orientation relative entre les deux dipôles.

En réalité, l'orientation des dipôles **varie de façon aléatoire du fait des fluctuations thermiques**. Il faut donc moyenniser cette interaction sur l'ensemble des orientations prises par les deux dipôles. Cependant, les fluctuations des orientations des deux dipôles sont corrélées, car elles dépendent de leur énergie d'interaction.

En effet, l'énergie typique d'interaction thermique d'une molécule est $k_B T$, où T est la température absolue en K et $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann. À température ambiante, cette énergie est de l'ordre de 25 meV. Cela signifie que si l'énergie d'interaction entre les dipôles est en valeur absolue supérieure à cette énergie, car les dipôles sont dans une configuration particulièrement favorable (alignés entre-eux et avec le vecteur position), alors les fluctuations thermiques ne permettront pas de changer l'orientation des dipôles. Ceci est quantifié par le **facteur de Boltzmann** (voir cours de thermodynamique et TDs). En clair, il faudrait écrire que :

$$E_{p,e} = \frac{\int d\Omega_1 d\Omega_2 E_r(\Omega_1, \Omega_2) \exp(-E_r(\Omega_1, \Omega_2))}{\int d\Omega_1 d\Omega_2 \exp(-E_r(\Omega_1, \Omega_2))}, \quad (2.51)$$

où E_r est donnée par l'Éq. (2.46), et $\Omega_{1,2}$ représentent les angles solides couverts par les deux dipôles. Par passage en coordonnées sphériques, et par un développement limité en fonction de βE_r , on aboutit à l'Éq. (2.52).

En tenant compte de ces fluctuations, on peut montrer que l'énergie moyenne d'interaction entre les dipôles s'écrit :

$$E_{p,e} = -\frac{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k_B T \|\mathbf{r}\|^6}, \quad (2.52)$$

qui fait intervenir explicitement la température, et qui varie maintenant comme $1/r^6$ où $r = \|\mathbf{r}\|$.

On constate que $E_{p,e}$ varie inversement avec la température, de sorte que de grandes fluctuations thermiques diminuent la valeur moyenne de l'énergie d'interaction. Cela est cohérent avec le fait que de grandes fluctuations thermiques amènent à des grandes fluctuations de l'orientation des dipôles.

La force d'interaction de Keesom s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = -\nabla E_{p,e} = -\frac{\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 k_B T \|\mathbf{r}\|^8} \mathbf{r}, \quad (2.53)$$

qui varie donc comme $1/r^7$.

La force de Keesom est **attractive**, et stabilise donc l'ensemble des deux molécules. Ceci explique pourquoi les solvants polaires sont miscibles entre-eux, et dissolvent les composés moléculaires polaires.

Interaction de Debye entre un dipôle permanent et un dipôle induit

On considère désormais une molécule au point M_1 présentant un dipôle permanent \mathbf{p}_1 . Ce dipôle crée un champ électrique \mathbf{E}_1 dans tout l'espace. Au point M_2 se trouve une molécule qui ne présente pas de moment permanent. Par contre, en présence du champ électrique créé par le dipôle \mathbf{p}_1 , la molécule acquiert un moment induit $\mathbf{p}_2 = \alpha_2 \mathbf{E}_1(M_2)$. La force subie par la molécule en M_2 s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla) \mathbf{E}_1(M_2). \quad (2.54)$$

Par exemple, pour la composante x :

$$F_x = p_{2,x} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial x} + p_{2,y} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial y} + p_{2,z} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial z} = \alpha_2 E_{1,x} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial x} + \alpha_2 E_{1,y} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial y} + \alpha_2 E_{1,z} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial z}. \quad (2.55)$$

Là encore, il faut utiliser le fait que le champ électrique est irrotationnel (ce qui est valable en électrostatique ou dans l'ARQS électrique), ce qui permet d'utiliser l'Éq. (2.28) et d'obtenir :

$$F_x = \alpha_2 E_{1,x} \frac{\partial E_{1,x}}{\partial x} + \alpha_2 E_{1,y} \frac{\partial E_{1,y}}{\partial x} + \alpha_2 E_{1,z} \frac{\partial E_{1,z}}{\partial x} = \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial \mathbf{E}_1^2}{\partial x}, \quad (2.56)$$

soit finalement :

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{E}_1^2 \right). \quad (2.57)$$

En particulier, cela signifie que la force dérive d'une énergie potentielle :

$$E_{p,e} = -\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{E}_1^2(M_2) = -\frac{1}{2} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(M_2). \quad (2.58)$$

On constate ici la différence avec le cas d'un dipôle permanent, pour lequel le facteur 1/2 est absent (voir l'Éq. (2.35)).

Cette force est une force instantanée, mais du fait des fluctuations thermiques, l'orientation de \mathbf{p}_1 varie de façon aléatoire. Il faut alors moyenniser cette force sur l'ensemble des orientations possibles. En première approximation, on peut considérer que les fluctuations de l'orientation de \mathbf{p}_1 sont indépendantes de la molécule en M_2 , et en particulier ne dépendent pas de leur énergie d'interaction. Nous montrerons en travaux dirigés que cette force s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\frac{3\alpha_2 \mathbf{p}_1^2}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^8} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2, \quad (2.59)$$

tandis que l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_{p,e} = -\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{E}_1^2(M_2) = -\frac{\alpha_2 \mathbf{p}_1^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^6}. \quad (2.60)$$

En particulier, on retiendra que la force varie comme $1/r^7$ et l'énergie potentielle comme $1/r^6$, avec $r = \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|$ la distance entre les deux molécules.

Contrairement à la force de Keesom entre dipôles permanents dont la dépendance en $1/r^7$ provient de la moyenne sur les orientations, la force de Debye instantanée varie déjà comme $1/r^7$, la moyenne sur les orientations n'affectant que le préfacteur.

La force de Debye est **attractive**.

Interaction de London entre dipôles instantanés

Cette troisième interaction se produit entre dipôles instantanés et ne requiert pas de moment permanent. Cette interaction est d'origine **quantique**. D'un point de vue classique, nous représentons le nuage électronique comme un ensemble de particules chargées ponctuelles. Mais, en mécanique quantique, les électrons sont décrits par une **fonction d'onde** qui représente l'amplitude de probabilité que chaque électron se trouve à une certaine position dans l'espace. Autrement dit, les atomes et molécules sont décrits de manière probabiliste. Même si en moyenne le nuage électronique d'un atome ou d'une molécule en l'absence de tout champ électrique est symétrique, il y a une probabilité non nulle que transitoirement ce nuage électronique soit asymétrique, de sorte que l'atome ou la molécule acquiert un moment dipolaire instantané $\mathbf{p}_1(t)$. Ce moment dipolaire peut alors induire un moment dipolaire sur un autre atome ou une autre molécule $\mathbf{p}_2(t)$, qui vont alors interagir. Un calcul quantique montre alors que la valeur moyenne d'énergie d'interaction est non nulle et s'écrit sous la forme :

$$E_{p,e} = -\Lambda \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\|\mathbf{r}\|^6}, \quad (2.61)$$

où Λ est une constante dimensionnée qui dépend de l'énergie d'ionisation des deux molécules. On retrouve alors une énergie d'interaction **attractive** qui varie en $1/r^6$, où $r = \|\mathbf{r}\|$, ce qui donnera une force d'interaction de London en $1/r^7$.

Cette interaction est souvent plus importante que les deux précédentes. Ceci explique pourquoi les solvants apolaires sont non miscibles avec les solvants polaires, tandis qu'ils dissolvent bien les composés moléculaires apolaires et qu'ils sont miscibles avec les solvants polaires.

Interaction de Van der Waals

En réalité, toutes les interactions précédentes peuvent exister simultanément. Tous ces effets s'ajoutent, et de façon générale, l'énergie d'interaction moyenne entre deux molécules séparées par une distance r s'écrit :

$$E_{p,e} = -\frac{\kappa}{r^6}, \quad (2.62)$$

où κ est une constante dimensionnée, difficile à calculer. Il s'agit de **l'interaction de Van der Waals** qui est une interaction **attractive**. Il en résulte une force d'interaction attractive de Van der Waals :

$$\mathbf{F} = -\frac{6\kappa}{r^8} \mathbf{r}, \quad (2.63)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position entre les deux molécules. Cette force varie comme $1/r^7$.

Très souvent, on introduit le potentiel de Lennard-Jones pour décrire l'interaction entre molécules, qui s'écrit sous la forme :

$$E_{p,e} = 4E_0 \left[\left(\frac{d}{r}\right)^{12} - \left(\frac{d}{r}\right)^6 \right], \quad (2.64)$$

où d est une distance caractéristique et E_0 une énergie caractéristique. La composante attractive se justifie par l'interaction de Van der Waals, la composante répulsive est purement empirique, et la puissance est choisie pour des commodités de calcul. Cette dernière décrit la répulsion des nuages électroniques quand les molécules sont proches.

3. Magnétostatique dans le vide

Dans tout ce chapitre, nous allons étudier des distributions de courants stationnaires (indépendantes du temps).

3.1. Distributions de courants

3.1.1. Définition

Distribution volumique de courants

On se place pour le moment dans un espace à trois dimensions, et on considère un élément de surface $d\mathbf{S}$ orienté centré sur le point M . La quantité de charges d^2q traversant la surface élémentaire pendant dt est :

$$d^2q = \mathbf{j}(M) \cdot d\mathbf{S}dt, \quad (3.1)$$

où $\mathbf{j}(M)$ est le **vecteur densité volumique de courants** au point M . On remarque que d^2q est positif si $\mathbf{j}(M)$ est orienté dans le même demi-espace que $d\mathbf{S}$.

La définition précédente montre que la densité volumique de courants s'exprime en $\text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ dans les unités du système international.

Distribution surfacique de courants

On étend la définition de la densité de courants à deux dimensions. On considère désormais un élément de longueur $d\ell$ orienté de vecteur **normal** $\mathbf{n}(M)$ (à ne pas confondre avec le vecteur $d\ell$ tangent au segment) centré sur le point M . La quantité de charges d^2q traversant le segment $d\ell$ pendant dt est :

$$d^2q = \mathbf{j}_s(M) \cdot \mathbf{n}(M)d\ell dt, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{j}_s(M)$ est le **vecteur densité surfacique de courants** au point M .

La définition précédente montre que la densité surfacique de courants s'exprime en $\text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ dans les unités du système international.

3.1.2. Description du mécanisme de la conduction

On appelle **conducteur** tout matériau dans lequel des charges libres, appelées porteurs de charge, peuvent se déplacer sur des distances macroscopiques, sous l'action d'une force aussi petite soit-elle.

Dans les **métaux**, la conduction est assurée par les électrons « libres » ou « de conduction » qui peuvent se déplacer sur des distances macroscopiques en présence d'un champ électrique. Ces derniers correspondent aux électrons qui se trouvent sur les couches électroniques insaturées des atomes constituant le métal. Les noyaux, ainsi que les électrons des couches saturés, appelés électrons « de cœur » ou « de valence » restent liés aux noyaux, forment des cations métalliques, qui constituent le réseau cristallin. Les électrons libres sont délocalisés et forment un gaz d'électrons au sein du conducteur. Ils participent non seulement à la conduction électrique, mais sont aussi responsables de la grande cohésion des métaux, car ils forment une « liaison métallique » à l'échelle macroscopique.

En l'absence de champ électrique, ces électrons libres ont un mouvement erratique. En présence d'un champ électrique s'ajoute à ce mouvement désordonné un mouvement plus lent **de dérive** commun

à tous les électrons, dont on note \mathbf{v}_d le vecteur vitesse. Si on note n la densité numérique d'électrons libres, c'est-à-dire le nombre d'électrons par unité de volume, alors la quantité de charges dq traversant un élément de surface $d\mathbf{S}$ pendant dt vaut :

$$d^2q = n(-e)\mathbf{v}_d \cdot d\mathbf{S}dt, \quad (3.3)$$

ce qui nous permet d'en déduire l'expression de la densité de courants dans les métaux :

$$\mathbf{j} = -nev_d = \rho\mathbf{v}_d, \quad (3.4)$$

où e désigne la charge électrique élémentaire, et ρ la densité volumique de charges libres dans le conducteur.

En ordre de grandeur : $n = 10^{28}\text{m}^{-3}$, $\|\mathbf{v}_d\| = 2 \times 10^{-4}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (sous une différence de potentiel de 1 V sur 1 m), $\|\mathbf{j}\| = 3 \times 10^5\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$.

Cette relation se généralise à tout conducteur même s'il possède p porteurs de charge, chacun de charge q_k ($k = 1, \dots, p$), de densité numérique n_k (de densité volumique de charges $\rho_k = n_k q_k$) et de vitesse de dérive $\mathbf{v}_{d,k}$, en sommant les contributions de chacun des types de porteurs :

$$\mathbf{j} = \sum_{k=1}^p n_k q_k \mathbf{v}_{d,k} = \sum_{k=1}^p \rho_k \mathbf{v}_{d,k}. \quad (3.5)$$

Les métaux ne sont pas les seuls conducteurs. On peut également citer :

- ▶ les solutions ioniques, dont les porteurs de charge sont les cations (chargés positivement) et les anions (chargés négativement) qui se déplacent en sens opposés sous l'action d'un champ électrique,
- ▶ les semi-conducteurs intrinsèques (non dopés) ou extrinsèques (dopés n ou p) sous certaines conditions de dopage et de température, dont les porteurs de charge sont les électrons ou les « trous » (vacances).

3.1.3. Intensité du courant

On rappelle que l'intensité du courant correspond à la **quantité de charges par unité de temps traversant une section transverse de conducteur**. Ainsi :

- ▶ dans un conducteur à trois dimensions, l'intensité s'obtient en intégrant la densité volumique de courants sur une surface \mathcal{S} transverse :

$$I = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{d^2q}{dt} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.6)$$

- ▶ dans un conducteur à deux dimensions, l'intensité s'obtient en intégrant la densité surfacique de courants sur un segment transverse \mathcal{C} :

$$I = \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{d^2q}{dt} = \iint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{j}_s(P) \cdot \mathbf{n}(P) d\ell, \quad (3.7)$$

- ▶ dans un conducteur à une dimension (un fil), l'intensité correspond à la quantité de charges passant par un point du fil par unité de temps.

L'intensité s'exprime en A dans les unités du système international.

3.1.4. Conservation de la charge

On va exprimer la conservation de la charge par une condition sur la densité volumique de courants. Pour cela, on considère un tube de courant délimité par deux surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 et dirigé de 1 vers 2. On note alors \mathcal{S} la surface fermée représentée par le cylindre s'appuyant sur les lignes de courant et de bases \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . Dans ce cylindre, en régime stationnaire, la charge électrique ne peut pas varier, donc toute la charge entrante dans ce cylindre doit en sortir. Or, par définition du tube de courant, toutes les charges entrent par la surface 1 et sortent par la surface 2. La charge entrante vaut donc :

$$Q_1 = - \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.8)$$

où le signe $-$ provient du fait que \mathbf{n} est dirigé vers l'extérieur du tube de courant, tandis que $\mathbf{j}(P)$ est dirigé de 1 vers 2. La charge sortante vaut quant à elle :

$$Q_2 = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.9)$$

L'égalité entre les charges entrante et sortante donne :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(P) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3.10)$$

car le flux latéral est nul (par définition du tube de courant). Ceci étant valable pour tout tube de courant, on en déduit que la densité volumique de courants \mathbf{j} est **à flux conservatif**, car **son intégrale sur toute surface fermée est nulle**. Localement, cela se traduit par :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(M) = 0. \quad (3.11)$$

En régime variable, la charge entrante n'est plus égale à la charge sortante et \mathbf{j} n'est plus à flux conservatif. Par contre, comme une charge ne peut pas être créée ni annihilée spontanément, la différence entre les charges entrante et sortante est égale à la variation temporelle de charge dans le tube de champ, ce qui permet d'aboutir à l'équation locale **de conservation de la charge** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(M, t) = 0. \quad (3.12)$$

Cette équation est l'archétype d'une équation de conservation (second membre égal à 0) où la dérivée temporelle de la densité d'une grandeur conservée est égale à l'opposé de la divergence du courant de transport de cette même grandeur.

3.1.5. Équivalences entre les distributions volumique, surfacique et linéique de courants

On considère un conducteur volumique dont on note \mathbf{j} la densité volumique de courants. On isole alors un tube élémentaire de courant qu'on peut assimiler à un cylindre de génératrice $d\ell$ et de surface dS . L'intensité élémentaire, qui correspond au flux entrant (ou sortant) de charges vaut :

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.13)$$

où $d\mathbf{S}$ est le vecteur normal à la section, de norme dS et de même sens que \mathbf{j} . Or, par définition d'un tube de courant \mathbf{j} , $d\ell$ et $d\mathbf{S}$ sont tous colinéaires et de même sens. Ainsi, on peut écrire :

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \frac{d\ell}{\|d\ell\|} dS, \quad (3.14)$$

soit finalement :

$$dI d\ell = j dV, \quad (3.15)$$

où dV désigne le volume élémentaire du tube de courant. Cette équation permet d'en déduire une correspondance formelle entre un portion de conducteur volumique et un circuit filiforme en considérant un tube élémentaire de courant.

À deux dimensions, le raisonnement se généralise, et on obtient :

$$dI d\ell = j_s dS, \quad (3.16)$$

où dS est la surface élémentaire du tube de courant (qui est un quadrilatère à deux dimensions).

3.2. Introduction aux effets magnétiques

Les courants (mais aussi certains matériaux magnétiques) interagissent entre-eux par une action à distance. Tout comme dans le cas de l'électrostatique, cette interaction est médiée par un **champ magnétique B** créé dans tout l'espace par les courants ou les matériaux magnétiques. Il est défini de sorte qu'une particule chargée de charge q et de vitesse \mathbf{v} au point M dans un référentiel galiléen subisse une **force de Lorentz magnétique** :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(M). \quad (3.17)$$

Plusieurs commentaires importants peuvent être faits sur la force de Lorentz magnétique.

- ▶ Il existe une direction particulière (celle du champ magnétique), telle que la composante de la force selon cette direction soit nulle.
- ▶ La force de Lorentz magnétique est **orthogonale à la fois au champ magnétique (direction de force nulle) et au vecteur vitesse** de la particule.
- ▶ La force de Lorentz étant orthogonale au mouvement, **elle ne travaille pas**.
- ▶ La force de Lorentz est proportionnelle à la norme de la vitesse de la particule.

Dans le cas général, les effets électriques et magnétiques s'ajoutent, de sorte que la force de Lorentz s'écrit :

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(M, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(M, t)]. \quad (3.18)$$

Le champ magnétique est homogène à une force par unité de charge et de vitesse, et s'exprime donc en $\text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ dans les unités du système international. Cette unité porte le nom de **Tesla (T)**. On lui préfère parfois le Gauss ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$).

Il est important de connaître quelques ordres de grandeur de champs magnétiques :

- ▶ champ magnétique terrestre : 0,2 G pour la composante horizontale et 0,4 G pour la composante verticale en France,
- ▶ champ créé par une bobine : 1 mT,
- ▶ champ créé dans l'entrefer d'un électro-aimant : 0,1 T – 1 T,
- ▶ champ créé par un aimant permanent en néodyme : 1 T,
- ▶ champ créé par une bobine supraconductrice (IRM/RMN) : 10 T.

L'expression de la force de Lorentz indique que la dimension du champ électrique est égale à celle du champ magnétique multipliée par une vitesse.

Dans les sections suivantes, nous allons nous donner les moyens de calculer le champ magnétique. Nous nous restreindrons au cas de champs magnétiques créés par les courants, en omettant le champ créé par les matériaux aimantés.

3.3. Formulation globale de la magnétostatique

Tout comme en électrostatique, on peut entièrement caractériser le champ magnétique par la donnée de son flux à travers toute surface fermée, et sa circulation le long de tout contour fermé. Ces relations doivent également faire intervenir les courants, afin de relier les sources aux effets.

3.3.1. Conservation du flux

On peut montrer expérimentalement que **le flux du champ magnétique est conservatif**, autrement dit il est **nul à travers toute surface fermée** :

$$\boxed{\iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} = 0,} \quad (3.19)$$

où \mathcal{S} désigne une surface fermée conventionnellement orientée vers l'extérieur.

Voyons dès à présent une application de cette relation. Considérons un tube de champ magnétique de bases 1 et 2 de surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , les lignes de champ étant orientées de 1 vers 2. Le flux du champ magnétique à travers ce tube de champ est nul, de sorte que :

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_\ell = 0, \quad (3.20)$$

où $\Phi_\ell = 0$ désigne le flux latéral, nul par définition d'un tube de champ, et les deux autres les flux à travers les bases, qui vérifient donc :

$$\Phi_2 = -\Phi_1. \quad (3.21)$$

On en déduit alors que :

- ▶ si les lignes de champ s'évasent, alors $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$ et la conservation du flux implique que la norme du champ magnétique diminue le long de la ligne de champ,
- ▶ si les lignes de champ se resserrent, alors $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$ et la norme du champ magnétique augmente le long de la ligne de champ.

On peut également comparer les équations concernant le flux pour les champs électrique et magnétique :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.22)$$

On peut donc en conclure qu'il **n'existe pas de charge (ou monopôle) magnétique libre**.

Il existe néanmoins en matière condensée des systèmes qui présentent des comportements analogues à ceux des monopôles magnétiques, cependant ce ne sont pas des particules élémentaires libres. On parle alors de quasi-particules, qui représentent des excitations du système par rapport à son état fondamental, par exemple dans les glaces de spins.

Cette propriété de conservation du flux du champ magnétique reste valable même avec des courants variables, dans le cadre de l'électromagnétisme.

3.3.2. Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère permet de relier la circulation du champ magnétique à la distribution de courants, qu'on énonce comme suit. **La circulation \mathcal{C} du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté \mathcal{C} est égale à la perméabilité magnétique μ_0 du vide multipliée par l'intensité enlacée par le contour, c'est-à-dire l'intensité du courant traversant toute surface**

orientée compatiblement avec le contour et délimitée par ce dernier, soit de façon symbolique :

$$C = \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_e = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.23)$$

où \mathcal{S} correspond à toute surface orientée délimitée par le contour \mathcal{C} dont l'orientation est compatible avec celle du contour (selon la règle de la main droite).

Le théorème d'Ampère est l'équivalent du théorème de Gauss, qui permet de relier les effets (champ magnétique) aux causes (courants).

Contrairement au champ électrostatique, le champ magnétique n'est pas à circulation conservative, et ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

Le théorème d'Ampère n'est valable qu'en magnétostatique. En présence de courants variables (électromagnétisme), il faut tenir compte du courant de déplacement.

La perméabilité magnétique du vide μ_0 est une constante fondamentale de la Physique qui vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ dans les unités du système international. De plus, elle est reliée à la permittivité diélectrique ϵ_0 du vide et à la célérité c de la lumière dans le vide par la relation (peut-être vue dans le cours d'ondes) :

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1. \quad (3.24)$$

Le Henry H est l'unité des coefficients d'induction, cela correspond donc à un flux de champ magnétique par unité d'intensité, ainsi $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ (où le Weber Wb est l'unité du flux du champ magnétique). On notera que le Henry correspond également à une énergie par unité de carré d'intensité.

La valeur de μ_0 est directement liée à la définition légale de l'Ampère (voir chapitre suivant).

3.3.3. Symétries et invariances du champ magnétique

Tout comme pour le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère ne peut être appliqué que dans des cas de haute symétrie. Il faut donc connaître les symétries et invariances du champ magnétique et les relier à celles de la distribution des courants.

Le principe de Curie est toujours valable : **les invariances de la distribution de courants sont aussi des invariances du champ magnétique** (voir des exemples dans le cours d'électrostatique).

En ce qui concerne les symétries, elles sont **différentes de ce qu'on a pu voir en électrostatique**, et on les énumère ci-dessous.

- Tout plan de symétrie Π de la distribution de courants est plan d'antisymétrie du champ magnétique, et donc le champ magnétique est orthogonal à tout plan de symétrie de la distribution de courants :

$$\mathbf{B}(M \in \Pi) \perp \Pi. \quad (3.25)$$

- Tout plan d'antisymétrie Π^* de la distribution de courants est plan de symétrie du champ magnétique, et donc le champ magnétique est tangent à tout plan d'antisymétrie de la distribution de courants :

$$\mathbf{B}(M \in \Pi^*) \in \Pi^*. \quad (3.26)$$

Pour le prouver, considérons un plan Π quelconque passant par un point M , et supposons qu'on place au point M une charge ponctuelle q . La force de Lorentz magnétique que cette charge subit est $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. On considère maintenant le problème physique symétrique par la réflexion de plan Π . Le vecteur vitesse est alors \mathbf{v}' , le champ magnétique \mathbf{B}' et la force $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}'$. Par ailleurs, on note \mathcal{S}_Π l'opérateur de symétrie qui à un vecteur associe son symétrique par la réflexion de plan Π . Comme on a considéré le problème physique symétrique, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_\Pi [\mathbf{F}] &= \mathbf{F}' \\ \mathcal{S}_\Pi [\mathbf{v}] &= \mathbf{v}' \end{cases} \quad (3.27)$$

Par ailleurs, l'application de l'opérateur de symétrie à l'expression de la force de Lorentz donne :

$$\mathcal{S}_\Pi [q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] = q\mathcal{S}_\Pi [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}] = -q\mathcal{S}_\Pi [\mathbf{v}] \wedge \mathcal{S}_\Pi [\mathbf{B}], \quad (3.28)$$

où le signe $-$ provient du produit vectoriel (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre). En combinant les Éq. (3.27) et (3.28) avec l'expression de \mathbf{F}' , on aboutit à :

$$\mathbf{B}' = -\mathcal{S}_\Pi [\mathbf{B}], \quad (3.29)$$

qui indique que le champ magnétique dans le problème symétrique par la réflexion de plan Π est l'opposé du symétrique du champ magnétique par la même réflexion.

Le même raisonnement, appliqué à la force de Lorentz électrique aurait montré que $\mathbf{E}' = \mathcal{S}_\Pi [\mathbf{E}]$, ce qui explique pourquoi les plans de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution de charges sont aussi ceux du champ électrostatique. Cela donne alors une preuve différente de celle reposant sur la loi de Coulomb.

Si maintenant le plan Π est plan de symétrie de la distribution des courants, alors le problème physique doit être invariant par la réflexion de plan Π . Ainsi \mathbf{B} doit être égal à $\mathbf{B}' = -\mathcal{S}_\Pi [\mathbf{B}]$. Un dessin montre alors que \mathbf{B} est forcément orthogonal au plan Π , ou encore que le plan Π est plan d'antisymétrie du champ magnétique.

3.3.4. Application du théorème d'Ampère

L'application du théorème d'Ampère se fait selon une démarche similaire à celle du théorème de Gauss :

1. Étudier les invariances de la distribution de courants pour réduire le nombre de variables d'espace dont dépend le champ magnétique.
2. Pour un point M donné, étudier les symétries de la distribution de courants par les symétries ou antisymétries de plan **passant par M** afin de réduire le nombre de composantes indépendantes du champ magnétique.
3. Considérer un contour fermé passant par le point M de sorte que le calcul de la circulation du champ magnétique le long de ce contour soit aisé. On prendra donc un contour tel qu'en chaque point, ce dernier soit tangent ou normal aux lignes de champ magnétique.
4. Calculer l'intensité enlacée par le contour, puis appliquer le théorème d'Ampère.

3.3.5. Relations de passage du champ magnétique (HP)

Nous allons voir une application des deux relations vues précédemment pour le champ magnétique (circulation et flux) afin d'en déduire les relations de passage du champ magnétique à la traversée d'une distribution surfacique de courants.

Nous verrons plus tard que, comme le champ électrique, le champ magnétique est discontinu sur les distributions surfacique et linéique de courants.

On considère une nappe Σ de courants de densité surfacique $\mathbf{j}_s(M)$, délimitant deux milieux notés 1 et 2. On considère tout d'abord un petit cylindre de hauteur $d\ell$ de part et d'autre de la nappe, et s'appuyant sur un élément de surface dS centré sur le point M . Le flux du champ magnétique à travers ce cylindre est nul, de sorte que :

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_\ell = 0, \quad (3.30)$$

où $d\Phi_{1,2}$ correspondent aux flux sur les bases dans les milieux 1 et 2 respectivement, et $d\Phi_\ell$ le flux latéral. Dans l'hypothèse où $d\ell \rightarrow 0$, alors $d\Phi_\ell = 0$ tandis que les flux sur les bases valent :

$$\begin{cases} d\Phi_1 &= -\mathbf{B}_1(M) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) \\ d\Phi_2 &= \mathbf{B}_2(M) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) \end{cases}, \quad (3.31)$$

où $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M)$ désigne le vecteur unitaire normal à Σ au point M orienté de 1 vers 2. On obtient donc que **la composante normale du champ magnétique est continue à la traversée d'une nappe de courants**, ou encore :

$$\mathbf{B}_1(M) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) = \mathbf{B}_2(M) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) \iff \mathbf{B}_{\mathbf{n},1}(M) = \mathbf{B}_{\mathbf{n},2}(M). \quad (3.32)$$

On considère maintenant un contour \mathcal{C} parallélogramme formé par 4 points M_1, N_1, N_2 et M_2 dans ce sens, proches d'un point M de la surface, tels que $\mathbf{M}_1\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2\mathbf{N}_2 = d\ell$ est tangent à la nappe, tels que M_1 et N_1 sont du même côté de la nappe, et M_2, N_2 du même côté de la nappe, mais pas dans le même demi-espace que M_1 et N_1 . D'après le théorème d'Ampère, la circulation $d\mathcal{C}$ du champ magnétique le long de ce contour vaut :

$$d\mathcal{C} = \mu_0 dI_e = \mu_0 \|d\ell\| \mathbf{j}_s(M) \cdot \mathbf{t}(M), \quad (3.33)$$

où le vecteur $\mathbf{t}(M)$ est un vecteur unitaire tangent à Σ au point M , orthogonal à $d\ell$, et de sorte que le contour \mathcal{C} soit orienté compatiblement avec $\mathbf{t}(M)$. Par ailleurs, la circulation du champ magnétique vaut :

$$d\mathcal{C} = \mathbf{B}(M_1) \cdot d\ell + \int_{P \in [N_1 N_2]} \mathbf{B}(P) \cdot d\ell' - \mathbf{B}(M_2) \cdot d\ell + \int_{P \in [M_2 M_1]} \mathbf{B}(P) \cdot d\ell'. \quad (3.34)$$

Dans l'hypothèse où l'épaisseur de ce contour tend vers 0, la composante normale du champ magnétique restant continue, les intégrales sur les segments $[N_1 N_2]$ et $[M_1 M_2]$ s'annulent, et on obtient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}(M_2) - \mathbf{B}(M_1)] \cdot d\ell &= -\mu_0 \|d\ell\| \mathbf{j}_s(M) \cdot \mathbf{t}(M) \\ [\mathbf{B}_{\mathbf{t},2}(M) - \mathbf{B}_{\mathbf{t},1}(M)] \cdot \frac{d\ell}{\|d\ell\|} &= -\mu_0 \mathbf{j}_s(M) \cdot \mathbf{t}(M) \end{aligned}. \quad (3.35)$$

Par définition de $\mathbf{t}(M)$, on a

$$\mathbf{t}(M) = \frac{d\ell}{\|d\ell\|} \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M), \quad (3.36)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_{\mathbf{t},2}(M) - \mathbf{B}_{\mathbf{t},1}(M)] \cdot \frac{d\ell}{\|d\ell\|} &= \mu_0 \mathbf{j}_s(M) \cdot \left[\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M) \wedge \frac{d\ell}{\|d\ell\|} \right] \\ [\mathbf{B}_{\mathbf{t},2}(M) - \mathbf{B}_{\mathbf{t},1}(M)] \cdot \frac{d\ell}{\|d\ell\|} &= \mu_0 \frac{d\ell}{\|d\ell\|} \cdot [\mathbf{j}_s(M) \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M)] \end{aligned}, \quad (3.37)$$

la dernière égalité découlant des propriétés du produit mixte. Cela permet donc de conclure que la **composante tangentielle du champ magnétique** est discontinue à la traversée d'une distribution surfacique de courants, soit :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{t},2}(M) - \mathbf{B}_{\mathbf{t},1}(M) = \mu_0 \mathbf{j}_s(M) \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M). \quad (3.38)$$

3.4. Formulation locale de la magnétostatique

On peut donner des équations locales qui sont les équivalentes des équations macroscopiques données dans la section précédente.

3.4.1. Équation à la divergence

On a vu précédemment que le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée était nul, ce qui revient à dire que **le champ magnétique est de divergence nulle** :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(M) = 0. \quad (3.39)$$

Il s'agit de l'**équation de Maxwell-Thomson**, qui reste valable en électromagnétisme.

La preuve se fait de la façon suivante. Pour toute surface fermée \mathcal{S} orientée vers l'extérieur, on a :

$$\oint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.40)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on réécrit cette intégrale surfacique en une intégrale volumique portant sur le volume \mathcal{V} délimité par la surface fermée :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{B}(M) dV = 0. \quad (3.41)$$

Cette propriété étant vraie pour tout volume \mathcal{V} , on en déduit l'Éq. (3.39).

3.4.2. Équation au rotationnel

Le théorème d'Ampère indique que la circulation du champ magnétique à travers tout contour fermé est égal au flux de la densité volumique de courants à travers la surface sous-tendue par le contour. Il est alors équivalent de dire que **le rotationnel du champ magnétique est égal à μ_0 multiplié par la densité volumique de courants**, soit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(M) = \mu_0 \mathbf{j}(M). \quad (3.42)$$

L'équation de **Maxwell-Ampère** cesse d'être correcte en électromagnétisme, car il faut alors tenir compte du courant de déplacement $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, soit :

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(M, t) = \mu_0 \mathbf{j}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M, t). \quad (3.43)$$

Les Éq. (3.39) et (3.42) sont linéaires vis-à-vis du champ magnétique et de la densité de courants. Ainsi, le champ magnétique vérifie un principe de superposition et s'exprime linéairement en fonction des sources.

La preuve de l'Éq. (3.42) est la suivante. On considère un contour \mathcal{C} fermé orienté. Le théorème d'Ampère indique alors que :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.44)$$

où \mathcal{S} désigne une surface délimitée par le contour \mathcal{C} et orientée compatiblement avec ce dernier. En

utilisant le théorème de Stokes, on peut réécrire le membre de gauche comme une intégrale surfacique :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}} \nabla \wedge \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.45)$$

Cette relation étant vraie pour toute surface \mathcal{S} , les intégrandes dans les deux membres doivent être égales, d'où l'Éq. (3.42).

3.5. Formulation intégrale de la magnétostatique : loi de Biot et Savart (HP)

3.5.1. Énoncé

En électrostatique, tous les développements sont partis de la loi de Coulomb, qui donne l'expression intégrale du champ électrique en fonction des sources. Il existe une relation identique en magnétostatique, qui peut être démontrée à partir des Éq. (3.39) et (3.42).

Considérons une distribution volumique Σ de courants caractérisée par une densité $\mathbf{j}(M)$. Le champ magnétique qu'elle crée au point M est donné par **la loi de Biot et Savart** :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV. \quad (3.46)$$

La loi de Biot et Savart se généralise au cas des distributions surfacique et linéique, en utilisant les équivalences entre ces distributions (voir l'Éq. (3.15)) :

- pour une distribution surfacique de courants :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}_s(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dS, \quad (3.47)$$

- pour une distribution linéique de courants (circuit) :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \frac{I(P) d\ell \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3}. \quad (3.48)$$

À partir de la loi de Biot et Savart, on peut redémontrer les propriétés de symétrie ou antisymétrie du champ magnétique, qui découlent de celles du produit vectoriel. Par ailleurs, la loi de Biot et Savart permet de démontrer les Éq. (3.39) et (3.42) (voir le paragraphe qui suit). Il y a donc une **équivalence** entre ces deux formulations. Par ailleurs, cette formulation montre bien que le champ magnétique vérifie un principe de superposition et s'exprime linéairement en fonction des sources (courants).

Tout comme la loi de Coulomb, la loi de Biot et Savart n'est valable qu'en magnétostatique, c'est-à-dire quand les courants sont permanents. Cela vient du fait qu'elle implique (et est la conséquence de) l'équation de Maxwell-Ampère, qui cesse d'être valable en électromagnétisme.

La loi de Biot et Savart présente une structure proche de la loi de Coulomb, notamment la décroissance de l'intégrande en $1/\|\mathbf{PM}\|^2$. Cela implique alors que le champ magnétique présente les mêmes propriétés de continuité que le champ électrique, en particulier :

- le champ magnétique est **discontinu à la traversée des distributions surfacique et linéique de courants**,
- le champ magnétique est **continu dans tout l'espace en dehors des distributions et dans les**

distributions volumiques de courants.

3.5.2. De Biot et Savart aux équations locales

Dans ce paragraphe, on montre comment les équations de Maxwell pour la magnétostatique peuvent être démontrées à partir de la loi de Biot et Savart.

Équation à la divergence (Maxwell-Thomson)

On prend la divergence de l'Éq. (3.46), en utilisant l'expression connue de la divergence d'un produit vectoriel, et en insistant sur la variable concernée par les opérations de dérivation :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla_M \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \left\{ \frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \cdot [\nabla_M \wedge \mathbf{j}(P)] - \mathbf{j}(P) \cdot \left[\nabla_M \wedge \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) \right] \right\} dV. \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M \wedge \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV.\end{aligned}\quad (3.49)$$

On peut alors utiliser le fait que

$$\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} = -\nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right), \quad (3.50)$$

comme vu dans le cours d'électrostatique, ainsi que le fait que le rotationnel d'un gradient est nul pour aboutir à l'Éq. (3.39).

Équation au rotationnel (Maxwell-Ampère)

On peut démontrer de la même manière l'équation de Maxwell-Ampère, en prenant désormais le rotationnel de l'Éq. (3.46). Pour cela, on a besoin du rotationnel du produit vectoriel de deux champs de vecteurs $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{b}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) [\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r})] - \mathbf{b}(\mathbf{r}) [\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})] + (\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{a}(\mathbf{r}) - (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r}). \quad (3.51)$$

On obtient alors (en omettant les termes faisant intervenir des dérivées de $\mathbf{j}(P)$ qui sont nuls) :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla_M \wedge \left(\frac{\mathbf{j}(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \left\{ \mathbf{j}(P) \nabla_M \cdot \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) - (\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) \right\} dV.\end{aligned}\quad (3.52)$$

En utilisant là encore l'Éq. (3.50), ainsi que l'expression du laplacien de $1/\|\mathbf{PM}\|$:

$$\Delta \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{PM}), \quad (3.53)$$

on aboutit à :

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(M) = \mu_0 \mathbf{j}(M) - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} (\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV. \quad (3.54)$$

Pour le second terme, on a :

$$\begin{aligned}(\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) &= -(\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right) \\ &= -\nabla_M \left(\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right), \\ &= \nabla_M \left(\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

car \mathbf{j} ne dépend pas de M . Le vecteur \mathbf{j} étant nul en dehors de la distribution de courants, on peut réécrire la seconde intégrale sur tout volume \mathcal{V} contenant Σ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} (\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} (\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \nabla_M \left(\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \right) dV. \quad (3.56) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_M \left(\iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathbf{j}(P) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV \right) \end{aligned}$$

On utilise alors qu'en régime permanent \mathbf{j} est à divergence nulle, puis le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} (\mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M) \left(\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) dV &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_M \left(\iiint_{P \in \mathcal{V}} \nabla_P \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(P)}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV \right), \quad (3.57) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_M \left(\oint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\mathbf{j}(P)}{\|\mathbf{PM}\|} \cdot d\mathbf{S} \right) \end{aligned}$$

en notant \mathcal{S} la surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} . Comme \mathcal{V} englobe strictement la distribution, \mathbf{j} est nul sur la surface \mathcal{S} . Cette intégrale est donc nulle, et on retrouve bien l'Éq. (3.42), en utilisant l'Éq. (3.54).

3.6. Potentiel vecteur (HP)

3.6.1. Définition

Nous avons vu précédemment l'Éq. (3.39) de Maxwell-Thomson qui indique que la divergence du champ magnétique est nulle dans tout l'espace. Cela est équivalent à dire que **le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur**, autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{B}(M) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M),} \quad (3.58)$$

où le potentiel vecteur est noté \mathbf{A} .

Le potentiel vecteur est défini à un gradient près, autrement dit si le champ magnétique dérive du potentiel vecteur \mathbf{A} alors il dérive aussi du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}'(M) = \mathbf{A}(M) + \nabla f(M), \quad (3.59)$$

où $f(M)$ est un champ scalaire quelconque. Cette transformation s'appelle **une transformation de jauge**.

Tout comme le potentiel scalaire, le potentiel vecteur n'a aucune signification physique, étant donné qu'il est défini à un gradient près.

L'introduction du potentiel vecteur n'est pas aussi avantageuse que celle du potentiel scalaire du point de vue calculatoire. En effet, le champ magnétique dérive d'un autre vecteur, et le calcul de \mathbf{B} à partir de \mathbf{A} nécessite de savoir calculer un rotationnel dans tout système de coordonnées.

3.6.2. Notion de jauge

Étant donné que le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini à un gradient près, il existe une infinité de potentiels vecteurs dont dérive le même champ magnétique. Cette latitude nous permet de fixer une condition particulière pour simplifier l'expression du potentiel vecteur. Nous allons donc imposer une condition, dite **condition de jauge** afin de rendre le potentiel vecteur unique (à une constante additive près),

mais cela relève d'un arbitraire. Changer de jauge revient à changer de potentiel vecteur, ce qui est autorisé car le potentiel vecteur est uniquement défini par l'Éq. (3.58).

Le théorème d'Helmholtz-Hodge indique qu'un champ vectoriel qui s'annule à l'infini est entièrement caractérisé par la donnée de sa divergence et de son rotationnel. Le champ magnétique fixant le rotationnel du potentiel vecteur, on peut se donner une jauge en fixant la divergence du potentiel vecteur. Un choix usuel est celui de **la jauge de Coulomb** :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M) = 0. \tag{3.60}$$

En électromagnétisme, on préfère parfois à la jauge de Coulomb la jauge de Lorenz :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) = 0, \tag{3.61}$$

où V est le potentiel électrique.

La condition de jauge restreint les transformations de jauge admissibles. En effet si \mathbf{A} est un potentiel vecteur vérifiant les Éq. (3.58) et (3.60), alors $\mathbf{A}'(M) = \mathbf{A}(M) + \nabla f(M)$ convient également à condition que $f(M)$ soit une fonction harmonique, autrement dit qu'elle satisfasse l'équation de Laplace :

$$\Delta f(M) = 0. \tag{3.62}$$

Si on impose que le potentiel vecteur s'annule à l'infini (ce qui est possible s'il n'y a pas de sources à l'infini), alors le champ $f(M)$ vérifie l'équation de Laplace avec les conditions aux limites de Neumann qui donnent $\nabla f(M)$ nul à l'infini. Il existe alors une solution triviale qui est $f = \text{Cste}$. Par ailleurs, un théorème d'analyse vectorielle (conséquence du théorème d'unicité de Stokes) indique que si une solution au problème existe, alors cette solution est définie à une constante additive près. Ainsi, en l'absence de sources à l'infini, **le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb est uniquement défini à une constante additive près**, souvent prise de sorte à ce que le potentiel vecteur s'annule à l'infini.

3.6.3. Équation de Poisson

En prenant le rotationnel de l'Éq. (3.58) et en utilisant l'Éq. (3.60) ainsi que l'expression du laplacien d'un champ de vecteurs, on obtient que le potentiel vecteur vérifie une **équation de Poisson dans la jauge de Coulomb** :

$$\Delta \mathbf{A}(M) = -\mu_0 \mathbf{j}(M). \tag{3.63}$$

Cette équation est similaire à l'équation de Poisson pour le potentiel scalaire en électrostatique :

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}. \tag{3.64}$$

3.6.4. Expression intégrale

À partir de l'Éq. (3.63), on peut obtenir une expression intégrale du potentiel vecteur. On se place en coordonnées cartésiennes, et on s'intéresse à une composante du potentiel vecteur, par exemple A_x :

$$\Delta A_x(M) = -\mu_0 j_x(M). \tag{3.65}$$

On peut alors exploiter la similarité entre les équations de Poisson en électrostatique et en magnéto-statique, car on a affaire à un champ scalaire A_x vérifiant une équation de Poisson. On en déduit que

la composante $A_x(M)$ est donnée par une expression intégrale analogue à celle du potentiel électrostatique en faisant les substitutions $\varepsilon_0 \longleftrightarrow 1/\mu_0$ et $\rho \longleftrightarrow j_x$, soit finalement pour une distribution Σ de courants :

$$A_x(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{j_x(P)}{\|\mathbf{PM}\|} dV. \quad (3.66)$$

Cette expression se généralise à toutes les composantes, soit finalement en notation vectorielle :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}(P)}{\|\mathbf{PM}\|} dV. \quad (3.67)$$

Cette expression se généralise aux autres distributions surfacique et linéique en utilisant l'Éq. (3.15) :

► pour une distribution surfacique :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}_s(P)}{\|\mathbf{PM}\|} dS, \quad (3.68)$$

► pour une distribution linéique :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \frac{I(P)d\ell}{\|\mathbf{PM}\|}. \quad (3.69)$$

Le potentiel vecteur est donné par une relation intégrale qui a la même structure que celle pour le potentiel électrostatique. On en déduit donc que le potentiel vecteur est défini et continu dans tout l'espace, ainsi que dans les distributions volumique et surfacique de courants. Par contre, le potentiel vecteur n'est pas défini sur les distributions linéiques de courants. Par ailleurs, tout comme le champ magnétique, le potentiel vecteur vérifie un principe de superposition et s'exprime linéairement en fonction des sources (courants).

On peut montrer que l'expression intégrale du potentiel vecteur redonne bien les Éq. (3.58) et (3.60). On prend tout d'abord le rotationnel de l'Éq. (3.67) :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{A}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla_M \wedge \left(\frac{\mathbf{j}(P)}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) \wedge \mathbf{j}(P) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \left(-\frac{\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \right) \wedge \mathbf{j}(P) dV, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}(P) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} dV \end{aligned} \quad (3.70)$$

qui est bien égal au champ magnétique donné par la loi de Biot et Savart (3.46).

On prend ensuite la divergence de l'Éq. (3.67) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \nabla_M \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(P)}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \mathbf{j}(P) \cdot \nabla_M \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV. \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \Sigma} \mathbf{j}(P) \cdot \nabla_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV \end{aligned} \quad (3.71)$$

Cette intégrale peut en réalité être étendue sur tout volume \mathcal{V} contenant strictement la distribution de courants. En utilisant la conservation de la charge qui s'écrit sous forme locale $\nabla_P \cdot \mathbf{j}(P) = 0$, on aboutit

à :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \nabla_P \left(\frac{j(P)}{\|\mathbf{PM}\|} \right) dV. \quad (3.72)$$

On peut alors utiliser le théorème de Green-Ostrogradski pour réécrire cette expression en fonction d'une intégrale surfacique sur la frontière de \mathcal{V} . Comme \mathcal{V} contient strictement la distribution Σ , j s'annule sur la frontière de \mathcal{V} , et on obtient bien l'Éq. (3.60).

3.7. Approximation dipolaire des distributions de courants

Dans cette section, on s'intéresse au champ magnétique créé par un circuit filiforme \mathcal{C} fermé (spire de courant) à grande distance devant sa taille caractéristique. On généralisera ensuite aux autres types de distributions.

3.7.1. Calcul du potentiel vecteur (HP)

Pour obtenir le champ magnétique, nous allons tout d'abord calculer le potentiel vecteur, donné par l'Éq. (3.69) :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in \mathcal{C}} \frac{d\ell}{\|\mathbf{PM}\|}. \quad (3.73)$$

On note alors O un point strictement inclus dans la surface délimitée par le contour.

Si le contour est un cercle, O peut être tout point du disque délimité par ce cercle, en particulier son centre.

On se place à grande distance devant les dimensions de la spire, c'est-à-dire que $\|\mathbf{OM}\| \gg \max_P \|\mathbf{OP}\|$. On effectue alors un développement limité :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{PM}\| &= \|\mathbf{PO} + \mathbf{OM}\| \\ &= \sqrt{\mathbf{OM}^2 - 2\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OM} + \mathbf{OP}^2} \\ &= \|\mathbf{OM}\| \sqrt{1 - 2\mathbf{OP} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^2} + \frac{\|\mathbf{OP}\|^2}{\|\mathbf{OM}\|^2}}, \\ &\simeq \|\mathbf{OM}\| \left(1 - \mathbf{OP} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^2} \right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

en se contentant du premier ordre. On obtient alors pour le champ magnétique, en se limitant à l'ordre 1 du développement limité :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \|\mathbf{OM}\|} \oint_{P \in \mathcal{C}} d\ell \left(1 + \mathbf{OP} \cdot \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^2} \right). \quad (3.75)$$

Le circuit étant fermé on a $\oint_{P \in \mathcal{C}} d\ell = \mathbf{0}$, ce qui annule le premier terme. On obtient donc :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \|\mathbf{OM}\|^3} \oint_{P \in \mathcal{C}} d\ell (\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OM}). \quad (3.76)$$

On utilise alors la formule de Kelvin, qui indique que pour un champ scalaire f :

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} f(P) d\ell = \iint_{P \in \mathcal{S}} d\mathbf{S} \wedge \nabla f(P), \quad (3.77)$$

où \mathcal{S} désigne la surface délimitée par le contour. Ici on choisit $f(P) = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{OM}$, dont le gradient est facile à calculer : $\nabla f(P) = \mathbf{OM}$ (où le gradient est ici à prendre par rapport au point P , un calcul en coordonnées cartésiennes le montre aisément). On aboutit à :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \|\mathbf{OM}\|^3} \iint_{P \in \mathcal{S}} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{OM}. \quad (3.78)$$

En introduisant le vecteur :

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I \iint_{P \in \mathcal{S}} d\mathbf{S} \quad (3.79)$$

(où \mathbf{S} désigne le vecteur surface du circuit), le potentiel vecteur se réécrit :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^3}. \quad (3.80)$$

On peut exprimer ce potentiel vecteur en coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Oz) porté par le vecteur \mathbf{m} , on trouve alors :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.81)$$

où m est la norme du vecteur \mathbf{m} .

3.7.2. Moment dipolaire magnétique

L'expression du potentiel vecteur a fait intervenir un vecteur \mathbf{m} qui dépend uniquement du courant parcourant le circuit et de sa géométrie, qui s'écrit :

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \quad (3.82)$$

où \mathbf{S} est le vecteur surface du circuit, c'est-à-dire le vecteur de norme égale à la surface délimitée par le contour du circuit, dirigé selon la normale au plan contenant le circuit et dont l'orientation est compatible avec celle du circuit (selon la règle de la main droite).

Le moment magnétique s'exprime en $A \cdot m^2$ dans les unités du système international.

Ce vecteur est le **moment dipolaire magnétique** du circuit. On peut le réécrire sous la forme d'une intégrale portant sur le circuit :

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{OP} \wedge d\boldsymbol{\ell}. \quad (3.83)$$

L'expression du moment dipolaire est indépendante du point O considéré à l'intérieur du circuit, c'est donc bien une quantité intrinsèque au circuit :

$$\frac{1}{2} \oint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{O}'\mathbf{P} \wedge Id\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \oint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{O}'\mathbf{O} \wedge Id\boldsymbol{\ell} + \frac{1}{2} \oint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{OP} \wedge Id\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \oint_{P \in \mathcal{C}} \mathbf{OP} \wedge Id\boldsymbol{\ell}, \quad (3.84)$$

le premier terme s'annulant car $\int_{P \in \mathcal{C}} d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}$.

On peut alors comparer l'expression du potentiel vecteur (3.80) avec celle obtenue dans le cas du dipôle électrostatique :

$$V(M) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{OM}\|^3}. \quad (3.85)$$

Ces deux équations ont une structure commune, notamment les deux potentiels ne dépendent que d'un vecteur moment dipolaire, ils sont **anisotropes** et ont **une dépendance en $1/r^2$** . On constate que ce terme dipolaire est le premier terme non nul dans le développement limité à grande distance du potentiel vecteur créé par une distribution de courants, contrairement au cas électrostatique où le premier terme non nul est le champ créé par une charge ponctuelle égale à la charge totale de la distribution, uniquement si la charge totale de la distribution est non nulle. Cela vient du fait qu'il n'existe pas l'analogie de charges ponctuelles pour le champ magnétique.

3.7.3. Champ magnétique dans l'approximation dipolaire

On peut calculer le champ magnétique créé par le circuit à grande distance en se plaçant en coordonnées sphériques et en calculant le rotationnel de l'Éq. (3.81). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi. \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \mathbf{e}_\theta
\end{aligned} \tag{3.86}$$

On obtient alors, après calculs des dérivées partielles, le champ magnétique en coordonnées sphériques créé par le circuit à grande distance devant ses dimensions :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta). \tag{3.87}$$

Ce champ se réécrit sous forme intrinsèque sous la forme :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{OM}) \mathbf{OM} - \|\mathbf{OM}\|^2 \mathbf{m}}{\|\mathbf{OM}\|^5}. \tag{3.88}$$

Ce champ est identique au champ électrique créé par le dipôle électrostatique, avec les substitutions $\mathbf{p} \longleftrightarrow \mathbf{m}$ et $\varepsilon_0 \longleftrightarrow 1/\mu_0$, notamment il est **anisotrope**, **dépend uniquement de m** et **décroît comme $1/r^3$** à grande distance. On peut alors en tirer plusieurs conséquences :

- ▶ les lignes du champ magnétique sont identiques à celles du champ électrostatique créé par le dipôle,
- ▶ le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire :

$$\Phi(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|^3}. \tag{3.89}$$

Cette propriété est fautive dans le cas général, mais découle ici du fait que loin du circuit, la densité volumique de courants est nulle et donc le rotationnel du champ magnétique est nul, en vertu de l'Éq. (3.42).

3.7.4. Actions subies par un circuit dans un champ magnétique

Cas d'un champ uniforme

Les résultats du dipôle électrostatique se transposent à l'identique, en particulier :

- ▶ la force subie par un circuit dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 est nulle :

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{3.90}$$

- ▶ le circuit subit un couple dont le moment s'écrit en tout point A de l'espace :

$$\mathcal{M}_A = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}_0. \tag{3.91}$$

En résumé, dans un champ magnétique uniforme, un circuit ne se déplace pas macroscopiquement mais oriente son moment magnétique avec le champ magnétique.

Cas d'un champ non uniforme

Là encore, les résultats du dipôle électrostatique se transposent facilement :

- la force subie par un circuit dans un champ magnétique non uniforme \mathbf{B}_0 est non nulle et s'écrit :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0(O), \quad (3.92)$$

qui peut se simplifier sous les hypothèses que (i) le moment magnétique est indépendant du champ extérieur, que (ii) le dipôle est loin de toute distribution de courants et que (iii) les courants qui créent le champ \mathbf{B}_0 sont permanents (les deux dernières hypothèses assurant que $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$) :

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0(O)), \quad (3.93)$$

- le circuit subit un couple dont le moment s'écrit au point O de l'espace :

$$\mathcal{M}_O = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}_0(O), \quad (3.94)$$

En un point A quelconque, le moment de couple est obtenu par la formule de composition des torseurs :

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_O + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{F}. \quad (3.95)$$

- si les hypothèses (i), (ii) et (iii) précédentes sont vérifiées, alors l'action du champ magnétique sur le circuit dérive d'une énergie potentielle :

$$E_{p,m} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0(O). \quad (3.96)$$

Ainsi, dans un champ magnétique non uniforme, un circuit se déplace macroscopiquement dans les zones de champ fort et aligne son moment magnétique le long des lignes du champ magnétique.

3.7.5. Extensions aux distributions surfacique et volumique de courants, notion de pôles magnétiques

Nous allons étendre les résultats précédents aux autres types de distributions. En effet, on se place en régime permanent et on suppose que la distribution volumique est une distribution bornée dans l'espace. Alors les lignes de courant (c'est-à-dire les lignes de champ du vecteur densité de courant \mathbf{j}) sont fermées. On peut ainsi considérer qu'une distribution volumique de courants est une superposition de circuits fermés, autrement dit on peut la voir comme une distribution de moments dipolaires magnétiques. Ces moments magnétiques doivent alors être sommés sur tout l'échantillon pour obtenir le moment dipolaire magnétique \mathbf{m} de la distribution. En utilisant l'Éq. (3.15), ainsi que l'expression intégrale (3.83) on obtient le moment dipolaire magnétique :

- d'une distribution volumique de courants \mathcal{V} :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathbf{OP} \wedge \mathbf{j}(P) dV, \quad (3.97)$$

- d'une distribution surfacique de courants \mathcal{S} :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iint_{P \in \mathcal{S}} \mathbf{OP} \wedge \mathbf{j}_s(P) dS. \quad (3.98)$$

Le champ que ces distributions crée à grande distance devant leurs dimensions caractéristiques est alors donné par l'Éq. (3.88), et les lignes de champ sont alors identiques à celles du dipôle électrostatique. En particulier, à l'extérieur de la distribution, toutes les lignes de champ semblent converger vers la base du vecteur \mathbf{m} et diverger depuis l'extrémité du même vecteur. Par analogie avec les charges en électrostatique, on définit :

- ▶ le **pôle positif** d'une distribution de courants, comme le lieu de divergence des lignes du champ magnétique,
- ▶ le **pôle négatif** d'une distribution de courants, comme le lieu de convergence des lignes de champ magnétique.

Le moment dipolaire magnétique est donc dirigé du pôle négatif vers le pôle positif.

Il existe cependant une différence fondamentale par rapport à l'électrostatique : un pôle magnétique ne peut exister seul car cela contredirait l'Éq. (3.39). Un pôle positif est toujours associé à un pôle négatif, et il est impossible de les séparer. La nullité du flux du champ magnétique à travers toute surface fermée entourant un seul pôle est assurée par l'existence de lignes de champ à l'intérieur de la distribution de courants dirigées du pôle négatif vers le pôle positif.

Cette notion de pôle magnétique se transpose également à la matière aimantée, c'est-à-dire à la matière possédant des propriétés magnétiques et capable de créer un champ magnétique (c'est le cas des aimants permanents par exemple). Les lignes de champ magnétique à l'extérieur de l'aimant divergent du pôle positif et convergent vers le pôle négatif.

3.8. Extensions de la magnétostatique

3.8.1. ARQS magnétique

L'ARQS a déjà été introduit dans le cours d'électrostatique et nous rappelons qu'il s'agit de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires, qui consiste à supposer que le temps typique de variation des sources est très grand devant le temps de propagation des champs. Ainsi, pour une distribution de courants $\mathbf{j}(P, t)$ variant sur une échelle caractéristique de temps τ et qu'on observe à une distance typique L , l'ARQS sera vérifiée à la condition que :

$$\boxed{\frac{L}{\tau c} \ll 1.} \tag{3.99}$$

Contrairement à l'électrostatique, nous allons ici nous placer dans le cadre de l'ARQS magnétique, et nous allons supposer que le système est à dominance magnétique. Si on note \tilde{j} un ordre de grandeur de la densité volumique de courants, et $\tilde{\rho}$ un ordre de grandeur de la densité volumique de charges, alors l'ARQS magnétique revient à supposer que :

$$\boxed{\frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \gg 1.} \tag{3.100}$$

Dans ce cas, le champ magnétique est calculé comme en magnétostatique, en utilisant les Éq. (3.39) et (3.42).

Le champ électrique est, quant à lui, calculé en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t). \tag{3.101}$$

3.8.2. Magnétostatique dans la matière aimantable (HP)

Il existe différents matériaux aimantables qui peuvent générer des champs magnétiques. Parmi eux, on distingue, de façon non exhaustive, les comportements suivants.

- ▶ Les paramagnétiques et diamagnétiques, en présence d'un champ magnétique extérieur, acquièrent un moment dipolaire magnétique \mathbf{m} non nul, et créent à leur tour un champ magnétique. Pour un diamagnétique, le moment dipolaire est anti-aligné avec le champ magnétique, alors qu'il est aligné avec le champ magnétique pour un paramagnétique.
- ▶ Les ferromagnétiques peuvent présenter un moment dipolaire \mathbf{m} même en l'absence de tout champ magnétique extérieur, et dont la réponse à un champ magnétique extérieur est non linéaire, très intense et souffre d'hystérésis.

Cette apparition de moments magnétiques dans la matière provient de ses constituants élémentaires. D'une part, les électrons gravitant autour des noyaux forment des boucles de courant élémentaires : on parle de moment dipolaire magnétique orbital. Par ailleurs, tout constituant élémentaire (proton, neutron, électron) possède également un moment magnétique intrinsèque d'origine purement quantique, lié à ses propriétés de spin :

$$\mathbf{m} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{S}, \quad (3.102)$$

où \mathbf{S} est le vecteur moment de spin de la particule (homogène à un moment cinétique, ou encore à \hbar), g un coefficient sans dimension (facteur numérique de Landé), $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ le magnéton de Bohr (avec m_e la masse de l'électron et e sa charge) et $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck réduite (avec h la constante de Planck). Même si chaque constituant élémentaire (proton, neutron, électron) possède un moment magnétique, il n'est pas garanti qu'un atome ou une molécule ait un moment dipolaire magnétique non nul, car il peut y avoir compensation parfaite.

On peut alors expliquer les différents types de comportements magnétiques.

- ▶ Le diamagnétisme peut se comprendre à partir des lois de l'induction (voir le chapitre suivant), même si un traitement rigoureux nécessite la mécanique quantique, en vertu du théorème de Bohr-van Leeuwen. D'après la loi de modulation de Lenz, le système tend à s'opposer aux variations du flux du champ magnétique et acquiert un moment magnétique anti-aligné avec le champ magnétique. Les systèmes diamagnétiques ne possèdent pas forcément de moment dipolaire en l'absence de champ magnétique extérieur.
- ▶ Le paramagnétisme peut être observé dans les matériaux dont les constituants (atomes, molécules) présentent un moment dipolaire magnétique non nul même en l'absence de champ magnétique extérieur. En présence d'un champ magnétique extérieur, les moments dipolaires magnétiques s'alignent avec le champ magnétique car cela est énergétiquement favorable.
- ▶ Le ferromagnétisme s'observe également dans les matériaux dont les constituants élémentaires présentent un moment magnétique non nul même en l'absence de champ extérieur. Mais contrairement au paramagnétisme, les interactions entre moments dipolaires des différents constituants (atomes, molécules) ne sont pas négligeables devant l'énergie d'interaction des dipôles avec le champ extérieur, et expliquent les propriétés particulières de la réponse des matériaux ferromagnétiques.

Lorsque le champ magnétique pénètre dans la matière aimantée, cette dernière acquiert une distribution de moments magnétiques (équivalente à des boucles de courant localisées dans le matériau). On peut alors montrer que la prise en compte de cette nouvelle distribution de courants liés revient à remplacer dans l'équation de Maxwell-Ampère μ_0 par $\mu_0\mu_r$ où μ_r est la perméabilité magnétique relative du matériau, qui est une grandeur adimensionnée. Ainsi, dans un milieu magnétique, les équations de Maxwell pour la magnétostatique se réécrivent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}(M, t) &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(M, t) &= \mu_0\mu_r \mathbf{j}(M, t) \end{aligned} \quad (3.103)$$

où la distribution de courants \mathbf{j} ne décrit que les courants libres.

On caractérise alors les matériaux magnétiques par une densité volumique de moments dipolaires magnétiques, qu'on appelle l'aimantation \mathbf{M} . On peut alors montrer que le champ magnétique créé par une distribution d'aimantation \mathbf{M} est équivalent à celui créé par la superposition d'une distribution volumique de courants liés de densité $\mathbf{j}_l = \nabla \wedge \mathbf{M}$ et d'une distribution surfacique de courants liés de densité $\mathbf{j}_{s,l} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers l'extérieur du matériau. En réinjectant cette expression dans l'Éq. (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_l) \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j} + \nabla \wedge \mathbf{M}), \\ \nabla \wedge (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}\tag{3.104}$$

tandis que l'Éq. (3.39) est inchangée. On introduit alors le vecteur excitation magnétique \mathbf{H} de sorte que $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ et tel que l'Éq. (3.42) se réécrit :

$$\nabla \wedge \mathbf{H}(M, t) = \mathbf{j}(M, t).\tag{3.105}$$

On a simplifié le problème des charges liées, mais au prix d'avoir introduit un autre champ vectoriel \mathbf{H} . Le problème admet donc plus d'inconnues (les trois composantes de \mathbf{B} et les trois composantes de \mathbf{H}) que d'équations (au nombre de trois, une donnée par l'Éq. (3.39) et deux données par l'Éq. (3.105)), et pour pouvoir le résoudre, il faut se donner une **relation phénoménologique** (tirée de l'expérience, et pas fondamentale comme les équations de Maxwell) pour modéliser le matériau aimantable. Dans le cas de matériaux magnétiques **linéaires, homogènes et isotropes** (ce qui exclut les matériaux ferromagnétiques), on suppose que la relation entre \mathbf{H} et \mathbf{M} est linéaire, scalaire et vraie en tout point de l'espace :

$$\mathbf{M}(M, t) = \chi_m \mathbf{H}(M, t),\tag{3.106}$$

où χ_m est une constante constitutive du matériau qu'on appelle la susceptibilité magnétique. On obtient alors $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, en notant $\mu_r = 1 + \chi_m$, ce qui nous permet d'obtenir l'Éq. (3.103) à partir de l'Éq. (3.105).

Attention, le système d'équations (3.103) est vrai uniquement en magnétostatique, ou dans le cadre de l'ARQS magnétique. Dans le cas général, l'Éq. (3.106) est vraie dans le domaine fréquentiel (c'est-à-dire en considérant les transformées de Fourier de \mathbf{M} et \mathbf{H}) et fait intervenir un tenseur d'ordre 2 (matrice 3x3) qui varie spatialement et qui dépend de la fréquence. On préfère alors garder l'Éq. (3.105) et l'équation de Maxwell-Thomson.

La valeur de $\mu_r = 1 + \chi_m$ dépend du matériau. Pour les diamagnétiques, χ_m varie entre -10^{-4} et -10^{-9} , pour les paramagnétiques, χ_m est compris entre 10^{-3} et 10^{-5} . Pour ces deux classes de matériaux, on a $\mu_r \simeq 1$ en très bonne approximation. Par contre, même s'il n'est pas possible de définir μ_r dans les matériaux ferromagnétiques (car non linéaires), on donne parfois $\mu_r \simeq 10^3 \gg 1$.

Les relations de passage à la traversée des distributions surfaciques sont modifiées en présence d'un milieu diélectrique, et s'écrivent dans le cadre de l'ARQS magnétique :

- la composante normale du champ électrique est continue à la traversée de la distribution surfacique :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{n},2}(M, t) = \mathbf{B}_{\mathbf{n},1}(M, t),\tag{3.107}$$

- la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue :

$$\frac{\mathbf{B}_{\mathbf{t},2}(M, t)}{\mu_{r,2}} - \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{t},1}(M, t)}{\mu_{r,1}} = \mu_0 \mathbf{j}_s(M, t) \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M).\tag{3.108}$$

Par ailleurs, en dehors de l'ARQS magnétique, la relation pour la composante normale de \mathbf{B} est inchangée, tandis que celle sur la composante tangentielle fait maintenant intervenir l'excitation magnétique \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_{t,2}(M, t) - \mathbf{H}_{t,1}(M, t) = \mathbf{j}_s(M, t) \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M). \quad (3.109)$$

4. Induction électromagnétique

Dans tout ce chapitre, on se place dans le cadre de l'ARQS magnétique : les effets magnétiques dominent donc les effets électriques.

4.1. Actions mécaniques subies par les courants dans un champ magnétique

4.1.1. Origine de la loi de Laplace

On considère une portion dV d'un conducteur parcouru par une densité volumique de courants \mathbf{j} et soumis à un champ magnétique \mathbf{B} . On suppose que ce conducteur présente p porteurs de charge, de charge q_j ($j = 1, \dots, p$), de densité numérique n_j et de vitesse de dérive \mathbf{v}_j . Chaque porteur de charge subit une force de Lorentz magnétique, et la résultante des forces subies par les charges dans le champ magnétique s'écrit donc :

$$d\mathbf{F}_{\text{Lor}} = \sum_{j=1}^p (n_j dV) q_j \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} dV \wedge \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

où on a identifié l'expression de la densité volumique de courants obtenue dans le chapitre précédent. Cette force est orthogonale à la direction du courant, et amène les porteurs de charge à acquérir un mouvement transverse à la direction du courant. Cependant, en régime permanent dans un conducteur, il ne peut y avoir d'accumulation de charges : le reste du conducteur exerce donc une force $d\mathbf{F}_{\text{cond} \rightarrow \text{port}}$ sur les porteurs de charge qui est l'opposée à $d\mathbf{F}_{\text{Lor}}$ afin de rendre le mouvement des porteurs de charge de nouveau longitudinal. D'après le principe des actions réciproques (loi de Newton), les porteurs de charge exercent donc sur le conducteur une force $d\mathbf{F}_{\text{port} \rightarrow \text{cond}} = -d\mathbf{F}_{\text{cond} \rightarrow \text{port}} = d\mathbf{F}_{\text{Lor}}$. **Indirectement, le conducteur subit donc une force du fait de la présence du champ magnétique donnée par la loi de Laplace :**

$$d\mathbf{F}_{\text{L}} = \mathbf{j} dV \wedge \mathbf{B}. \quad (4.2)$$

Attention, la force de Laplace est différente de la force de Lorentz. La première s'exerce sur **un conducteur**, qui est non chargé et qui peut être au repos, alors que la seconde s'exerce sur une **particule chargée en mouvement**. Même si on peut comprendre la première à partir de la seconde, ces deux forces ont des propriétés différentes, notamment la force de Laplace peut travailler alors que la force de Lorentz ne travaille pas, car toujours orthogonale au déplacement.

4.1.2. Loi de Laplace

Nous venons de voir qu'un conducteur placé dans un champ magnétique subit **une force de Laplace**, dont l'expression est :

- pour un élément infinitésimal dV d'un conducteur à trois dimensions :

$$d\mathbf{F}_{\text{L}} = \mathbf{j} dV \wedge \mathbf{B}, \quad (4.3)$$

- pour un élément infinitésimal dS d'un conducteur à deux dimensions :

$$d\mathbf{F}_{\text{L}} = \mathbf{j}_s dS \wedge \mathbf{B}, \quad (4.4)$$

- pour un élément infinitésimal $d\ell$ d'un circuit filiforme :

$$\boxed{d\mathbf{F}_L = I d\ell \wedge \mathbf{B}.} \quad (4.5)$$

4.1.3. Actions exercées sur un conducteur entier

Pour connaître les actions exercées sur un conducteur entier, il suffit de sommer l'ensemble des actions sur tout le conducteur. Il faut alors distinguer les deux éléments du torseur de Laplace : **la résultante** des forces de Laplace, et **le moment de couple** des forces de Laplace.

Résultante des forces de Laplace

On somme les actions sur tout le conducteur :

- pour un conducteur linéique \mathcal{C} :

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \oint_{M \in \mathcal{C}} I d\ell \wedge \mathbf{B}(M),} \quad (4.6)$$

- pour un conducteur surfacique \mathcal{S} :

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}_s(M) \wedge \mathbf{B}(M) dS,} \quad (4.7)$$

- pour un conducteur volumique \mathcal{V} :

$$\boxed{\mathbf{F}_L = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathbf{j}(M) \wedge \mathbf{B}(M) dV.} \quad (4.8)$$

En particulier, on notera qu'un conducteur ne subit **aucune force dans un champ magnétique uniforme sur tout son volume**.

Moment de couple des forces de Laplace

Pour calculer le moment de couple des forces de Laplace au point A , on somme les moments élémentaires :

- pour un conducteur linéique \mathcal{C} :

$$\boxed{\mathcal{M}_{L,A} = \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{AM} \wedge [I d\ell \wedge \mathbf{B}(M)],} \quad (4.9)$$

- pour un conducteur surfacique \mathcal{S} :

$$\boxed{\mathcal{M}_{L,A} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{AM} \wedge [\mathbf{j}_s(M) \wedge \mathbf{B}(M)] dS,} \quad (4.10)$$

- pour un conducteur volumique \mathcal{V} :

$$\boxed{\mathcal{M}_{L,A} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathbf{AM} \wedge [\mathbf{j}(M) \wedge \mathbf{B}(M)] dV.} \quad (4.11)$$

On s'intéresse maintenant à ce qui se passe dans le cas où le **champ magnétique est uniforme** sur toute la longueur d'un circuit fermé. Dans ce cas, le moment de couple se réécrit, en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$$\mathcal{M}_{L,A} = \oint_{M \in \mathcal{C}} I [(\mathbf{AM} \cdot \mathbf{B}) d\ell - (\mathbf{AM} \cdot d\ell) \mathbf{B}]. \quad (4.12)$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{AM}'^2 - \mathbf{AM}^2 &= \nabla \left(\|\mathbf{AM}\|^2 \right) \cdot d\mathbf{M}M' \\ &= \nabla \left(\|\mathbf{AM}\|^2 \right) \cdot d\ell, \\ &= 2 \|\mathbf{AM}\| \nabla \left(\|\mathbf{AM}\| \right) \cdot d\ell \\ &= 2\mathbf{AM} \cdot d\ell \end{aligned} \quad (4.13)$$

de sorte que le second terme se réécrit sous la forme :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} I (\mathbf{AM} \cdot d\ell) \mathbf{B} = \frac{I}{2} \oint_{M \in \mathcal{C}} \nabla \left(\|\mathbf{AM}\|^2 \right) \cdot d\ell = 0, \quad (4.14)$$

car l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé s'annule. Le moment de couple s'écrit donc :

$$\mathcal{M}_{L,A} = \oint_{M \in \mathcal{C}} I (\mathbf{AM} \cdot \mathbf{B}) d\ell, \quad (4.15)$$

qu'on peut exprimer en fonction d'une intégrale surfacique sur la surface \mathcal{S} délimitée par le contour (et orientée compatiblement avec celui-ci) par le théorème de Kelvin :

$$\mathcal{M}_{L,A} = \iint_{M \in \mathcal{S}} I d\mathbf{S} \wedge \nabla (\mathbf{AM} \cdot \mathbf{B}), \quad (4.16)$$

soit finalement :

$$\mathcal{M}_{L,A} = \iint_{M \in \mathcal{S}} I d\mathbf{S} \wedge \mathbf{B} = I \mathbf{S} \wedge \mathbf{B}, \quad (4.17)$$

où \mathbf{S} désigne le vecteur surface du circuit, et où on a utilisé que $\nabla (\mathbf{AM} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}$ car \mathbf{B} est un vecteur constant.

On observe que ce moment est indépendant du point A . Cela vient du fait que la résultante des forces de Laplace sur un conducteur dans un champ uniforme est nulle. Le torseur des actions de Laplace est un torseur couple.

On retrouve les résultats obtenus pour le dipôle magnétique dans un champ uniforme pour la force et le moment de couple.

4.1.4. Définition légale de l'Ampère (HP)

Entre 1948 et 2019, l'Ampère était une unité définie à partir de la force qui s'exerce entre deux conducteurs. Plus précisément, sa définition était la suivante : **l'Ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire égale à $2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.**

Dans le TD de magnétostatique, on a vu que le champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant I s'écrit, en dehors du fil, et en supposant la longueur du fil très grande devant ses dimensions transverses :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad (4.18)$$

en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec le fil. La force exercée par le fil \mathcal{C}_1 sur le fil \mathcal{C}_2 , supposés de même axe, de même orientation, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, et distants de h , s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{M \in \mathcal{C}_2} Id\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}_1(M), \quad (4.19)$$

en notant \mathbf{B}_1 le champ magnétique créé par \mathcal{C}_1 , et en supposant que les deux fils sont parcourus par le même courant. On obtient alors :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{M \in \mathcal{C}_2} Id\mathbf{l}e_z \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \right) \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 I \ell_2}{2\pi h} \mathbf{e}_\theta, \quad (4.20)$$

ce qui correspond à une force par unité de longueur :

$$\frac{\|\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\|}{\ell_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}. \quad (4.21)$$

La définition de l'Ampère (membre de gauche égal à $2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $I = 1 \text{ A}$, et $h = 1 \text{ m}$) impose alors la valeur de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ dans les unités du système international.

Depuis 2019, l'Ampère a changé de définition légale, 'il s'agit maintenant de la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e , égale à $1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$, unité égale à $\text{A} \cdot \text{s}$, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ (la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de Césium 133 non perturbé).

4.2. Travail des forces de Laplace

Contrairement à la force de Lorentz, **la force de Laplace travaille**. Dans cette section, on établit l'expression de son travail.

4.2.1. Expression générale

On calcule le travail élémentaire de la force de Laplace pour un champ de déplacement $\delta\mathbf{u}(M)$ du conducteur linéique, en sommant les travaux reçus par tous les éléments infinitésimaux :

$$\delta W_L = \oint_{M \in \mathcal{C}} \delta\mathbf{u}(M) \cdot (Id\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}(M)) = I \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M) \cdot (\delta\mathbf{u}(M) \wedge d\mathbf{l}), \quad (4.22)$$

où on a utilisé les propriétés du produit mixte. On reconnaît alors dans l'intégrale **le flux coupé du champ magnétique** $d\Phi_c$, c'est-à-dire le flux du champ magnétique à travers la **surface coupée**, qui est la surface balayée par le conducteur lors de son déplacement ou déformation élémentaire :

$$\delta W_L = Id\Phi_c, \quad (4.23)$$

où

$$d\Phi_c = \oint_{M \in \mathcal{C}} \delta^2\Phi_c, \quad (4.24)$$

avec

$$\delta^2\Phi_c = \mathbf{B}(M) \cdot (\delta\mathbf{u}(M) \wedge d\mathbf{l}), \quad (4.25)$$

le flux coupé par un élément infinitésimal de circuit.

Pour un déplacement macroscopique du conducteur, le travail des forces de Laplace s'écrit :

$$W_L = \int Id\Phi_c, \quad (4.26)$$

qui se simplifie si le courant électrique est constant au cours du déplacement du conducteur :

$$W_L = I\Phi_c, \quad (4.27)$$

qui fait intervenir le flux coupé Φ_c à travers la surface balayée par le conducteur.

Il faut prendre garde que les signes de I et $d\Phi_c$ dépendent de l'orientation du circuit, mais pas celui de δW_L .

4.2.2. Expression dans un champ stationnaire - théorème de Maxwell

On se place dans le cas où le champ magnétique est indépendant du temps (stationnaire). On considère un circuit fermé \mathcal{C} qu'on déplace dans un champ magnétique stationnaire. Lors de son mouvement il balaie la surface coupée \mathcal{S}_c . Initialement, la configuration du circuit est notée \mathcal{C}_1 et elle est notée \mathcal{C}_2 à la fin du mouvement.

La réunion des surfaces \mathcal{S}_c et des surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 délimitées par les contours \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 respectivement forme une surface fermée. D'après l'équation de Maxwell-Thomson, le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée est nulle soit :

$$\begin{aligned} \iint_{M \in \mathcal{S}_1} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}_2} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}_c} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \iint_{M \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_c} \mathbf{B}(M) \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ -\Phi_1 - \Phi_c + \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

où les flux sont comptés positivement par rapport aux contours, et le signe $-$ devant Φ_1 et Φ_c viennent du fait qu'une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre). On obtient donc finalement dans ce cas que :

$$\Phi_c = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi, \quad (4.29)$$

où $\Delta\Phi$ désigne la variation de flux à travers le circuit au cours de son déplacement, ou de façon élémentaire :

$$d\Phi_c = d\Phi. \quad (4.30)$$

On obtient alors le **théorème de Maxwell** qui donne le travail des forces de Laplace pour un circuit déplacé **dans un champ magnétique stationnaire** :

$$\delta W_L = I d\Phi, \quad (4.31)$$

ou encore pour un déplacement macroscopique :

$$W_L = \int I d\Phi, \quad (4.32)$$

ou bien même pour un déplacement **à courant constant** :

$$W_L = I \Delta\Phi. \quad (4.33)$$

Les Éq. (4.31) et (4.32) sont correctes quelle que soit l'origine du champ magnétique, en particulier ces égalités restent vraies pour l'autoinduction (voir Sec. 4.4.1). L'Éq. (4.33), quant à elle, présuppose qu'il peut y avoir variation de flux sans variation de courant : cette relation n'est donc valable que si le champ magnétique est indépendant du courant circulant dans le conducteur, en particulier elle est fautive pour l'autoinduction.

4.2.3. Énergie potentielle d'un circuit parcouru par un courant constant dans un champ magnétique stationnaire (HP)

Nous avons vu précédemment que pour un circuit dans un champ magnétique stationnaire, le travail des forces de Laplace s'écrit :

$$\delta W_L = I d\Phi = -d(-I\Phi), \quad (4.34)$$

où nous avons utilisé que le circuit était parcouru par un courant constant pour rentrer I dans l'élément différentiel. On en déduit que l'action des forces de Laplace dérive d'une énergie potentielle **dans ce cas**, qui s'écrit :

$$E_p = -I\Phi. \quad (4.35)$$

Cette expression de l'énergie potentielle est fautive si le courant dans le circuit dépend du flux, ou inversement si le champ magnétique dépend du courant circulant dans le circuit (cas de l'autoinduction).

On en déduit donc que le système évolue de sorte à minimiser son énergie potentielle, c'est-à-dire à maximiser le produit $I\Phi$, ce qui revient à maximiser Φ si $I > 0$ et le minimiser sinon. C'est la **règle du flux maximal**.

On peut réécrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_p = -I\Phi = -I \iint_{M \in \mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(M) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(O), \quad (4.36)$$

en notant \mathcal{S} la surface sous-tendue par le contour \mathcal{C} et orientée compatiblement, et en supposant que le champ magnétique varie peu sur \mathcal{S} , de sorte qu'on peut l'assimiler au champ magnétique en un point O quelconque de \mathcal{S} (ce qui est vrai a fortiori pour un champ magnétique uniforme). On retrouve alors le résultat du dipôle magnétique.

4.2.4. Puissance des forces de Laplace

On peut calculer la puissance des forces de Laplace, qui est égale au travail élémentaire des forces de Laplace par unité de temps. Ainsi, on obtient dans le cas général :

$$P_L = I \frac{d\Phi_c}{dt}. \quad (4.37)$$

Dans le cas d'un **circuit dans un champ magnétique stationnaire**, la puissance des forces de Laplace se réécrit :

$$P_L = I \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.38)$$

4.3. Lois macroscopiques de l'induction

4.3.1. Introduction aux phénomènes d'induction

Nous allons décrire les phénomènes d'induction à partir d'une expérience simple utilisant une bobine et un aimant.

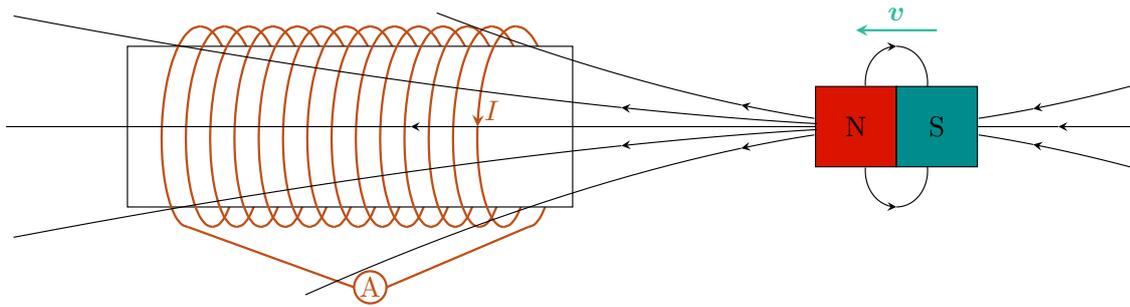


FIGURE 4.1. – On approche le pôle Nord d'un aimant du solénoïde à la vitesse v , le solénoïde restant fixe et branché à un ampèremètre. On constate alors l'apparition d'un courant induit quand l'aimant est mobile, dont le sens est indiqué sur le schéma.

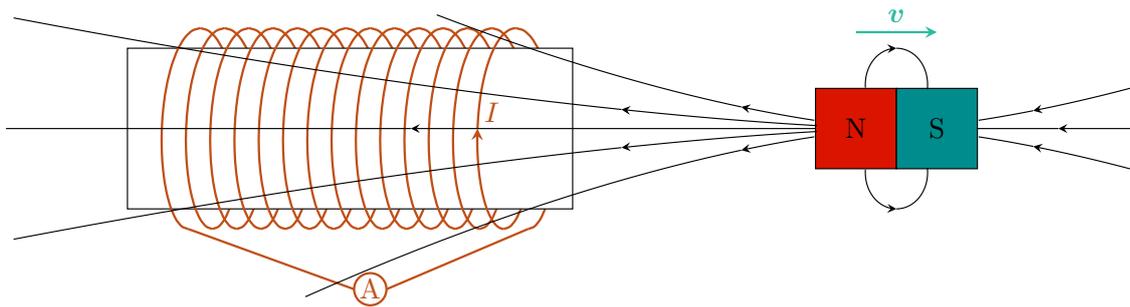


FIGURE 4.2. – On éloigne le pôle Nord d'un aimant du solénoïde à la vitesse v , le solénoïde restant fixe et branché à un ampèremètre. On constate alors l'apparition d'un courant induit quand l'aimant est mobile, dont le sens est indiqué sur le schéma.

Induction de Neumann

Imaginons qu'on déplace un aimant à vitesse v constante, la bobine étant maintenue fixe et reliée à un ampèremètre. Expérimentalement, on constate plusieurs choses, qu'on énumère ci-dessous.

- ▶ Lorsqu'on approche le pôle Nord de l'aimant de la bobine, un courant **est induit** (on parle d'« induction ») dans le bobinage, dont le sens est tel que le champ magnétique créé par la bobine est de sens opposé à celui créé par l'aimant (voir Fig. 4.1).
- ▶ Lorsqu'on éloigne le pôle Nord de l'aimant de la bobine, un courant induit apparaît dans le bobinage, dont le sens est tel que le champ magnétique créé par la bobine est de même sens que celui créé par l'aimant (voir Fig. 4.2).
- ▶ Lorsqu'on approche le pôle Sud de l'aimant de la bobine, un courant est induit dans le bobinage, dont le sens est tel que le champ magnétique créé par la bobine est de sens opposé à celui créé par l'aimant (voir Fig. 4.3).
- ▶ Lorsqu'on éloigne le pôle Sud de l'aimant de la bobine, un courant induit apparaît dans le bobinage, dont le sens est tel que le champ magnétique créé par la bobine est de même sens que celui créé par l'aimant (voir Fig. 4.4).

On peut donc en tirer plusieurs conséquences.

- ▶ Le courant dans la bobine **dépend à la fois du sens du champ magnétique et du sens de déplacement** de l'aimant.
- ▶ L'**intensité du courant dépend de la norme de la vitesse** à laquelle on bouge l'aimant.

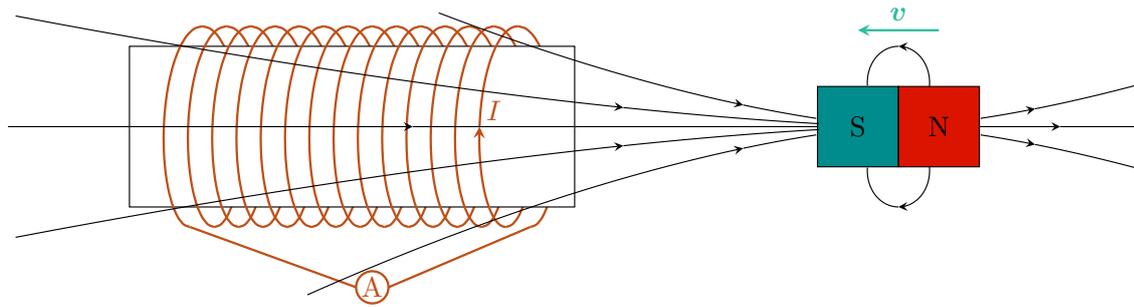


FIGURE 4.3. – On approche le pôle Sud d'un aimant du solénoïde à la vitesse v , le solénoïde restant fixe et branché à un ampèremètre. On constate alors l'apparition d'un courant induit quand l'aimant est mobile, dont le sens est indiqué sur le schéma.

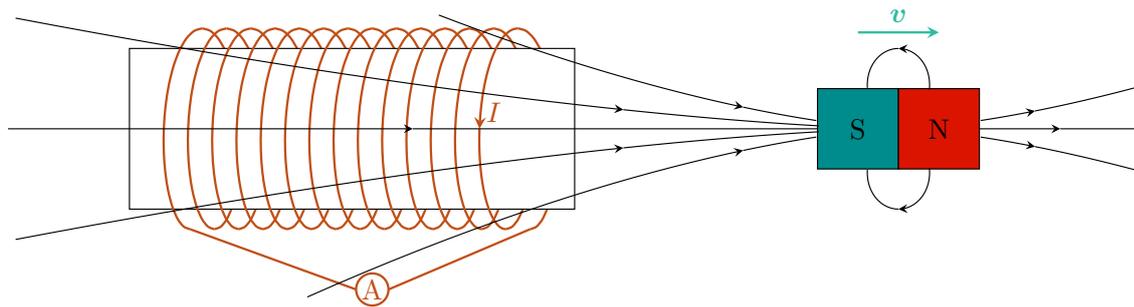


FIGURE 4.4. – On éloigne le pôle Sud d'un aimant du solénoïde à la vitesse v , le solénoïde restant fixe et branché à un ampèremètre. On constate alors l'apparition d'un courant induit quand l'aimant est mobile, dont le sens est indiqué sur le schéma.

- Le courant n'apparaît que lorsque l'aimant est mobile : **si on immobilise l'aimant, alors le courant dans la bobine finit par s'annuler.**

Ce type de phénomène d'induction où un circuit est fixe dans un champ magnétique variable (ici car l'aimant est mobile) s'appelle l'**induction de Neumann**.

Le chauffage à induction (notamment par les plaques à induction), le transformateur monophasé (dans beaucoup d'appareils électriques quotidiens) sont des exemples courants de l'induction de Neumann.

Induction de Lorentz

On imagine qu'on fixe l'aimant et qu'on déplace le solénoïde toujours relié à un ampèremètre. On observe alors les mêmes phénomènes, car cette situation découle de la situation précédente par un changement de référentiel.

Ce type de phénomène d'induction où un circuit est mobile dans un champ magnétique stationnaire s'appelle l'**induction de Lorentz**.

Le freinage à induction (notamment pour les poids lourds) et les machines à courant continu (moteur et génératrice) sont des exemples courants de l'induction de Lorentz.

Cas général

Dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où à la fois l'aimant et la bobine sont mobiles, on observe les mêmes phénomènes : on aura compris des cas précédents que seule la vitesse relative de l'un par rapport à l'autre est pertinente (il suffit de faire un changement de référentiel).

La machine asynchrone (moteur ou alternateur) est un exemple de ce cas général d'induction d'un conducteur mobile dans un champ magnétique variable.

4.3.2. Loi de Faraday

Cas général

Reprenons l'exemple de la bobine et de l'aimant. Nous avons vu que lorsque l'un avait un mouvement relatif par rapport à l'autre, alors un courant apparaissait dans la bobine. Cela signifie que le schéma électrocinétique équivalent du solénoïde est (où la résistance représente celle du bobinage) :

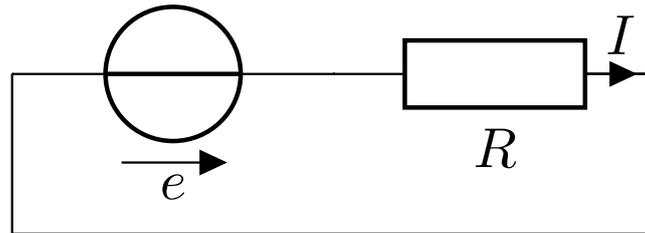


FIGURE 4.5. – Schéma électrocinétique équivalent d'un circuit fermé pour l'induction.

Autrement dit, une **force électromotrice d'induction** e apparaît dans le circuit, lorsque le circuit est fixe en présence d'un champ magnétique variable (induction de Neumann) ou lorsque le conducteur est déplacé dans un champ magnétique stationnaire (induction de Lorentz), ou bien même dans le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable. Des expériences ont alors montré que la force électromotrice d'induction est donnée par **la loi de Faraday** :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} \right), \quad (4.39)$$

où Φ désigne le flux du champ magnétique à travers le circuit, et \mathcal{S} la surface délimitée par le circuit fermé. On constate qu'il peut y avoir plusieurs raisons pour que le flux du champ magnétique varie :

- ▶ le champ magnétique varie ($\mathbf{B}(M, t)$ est une fonction du temps),
- ▶ le circuit se déforme ou est mobile (la surface \mathcal{S} varie au cours du temps).

Par ailleurs, on peut relier e au courant traversant le circuit en appliquant la loi des mailles et la loi d'Ohm :

$$e(t) = RI(t). \quad (4.40)$$

Attention, la relation précédente dépend des conventions d'orientations choisies, elle est correcte si la force électromotrice d'induction est orientée en **convention générateur**.

Les expériences précédentes avec l'aimant et la bobine ont montré que le courant induit était proportionnel à la vitesse du conducteur ou de l'aimant, ou bien encore à la variation du flux du champ magnétique. Par ailleurs, si le flux du champ magnétique augmente (cf Fig. 4.1 avec le solénoïde orienté de sorte que le flux du champ magnétique créé par l'aimant soit positif), alors on a vu que le courant induit est négatif (ce qui rationalise le signe $-$ dans la loi de Faraday).

Induction de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann, le circuit est fixe, tandis que le champ magnétique est variable. Dans ce cas, la loi de Faraday se réécrit :

$$e(t) = - \iint_{M \in \mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.41)$$

où \mathcal{S} désigne la surface délimitée par le circuit fermé. Dans le cas particulier d'un champ uniforme, on obtient :

$$e = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{S}, \quad (4.42)$$

où \mathbf{S} désigne le vecteur surface du circuit.

Induction de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, on peut considérer une portion $[AB]$ de conducteur. Dans ce cas le schéma électrocinétique équivalent de la portion de circuit est :

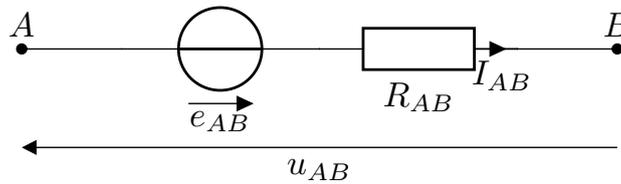


FIGURE 4.6. – Schéma électrocinétique équivalent d'une portion $[AB]$ de circuit pour l'induction de Lorentz.

Dans ce cas, la loi d'Ohm associée à la loi des mailles donne :

$$R_{AB} I_{AB}(t) = u_{AB}(t) + e_{AB}(t), \quad (4.43)$$

tandis que la force électromotrice d'induction $e_{AB}(t)$ est donnée par la loi de Faraday :

$$e_{AB}(t) = - \frac{d\Phi_c}{dt}(t), \quad (4.44)$$

où Φ_c désigne le flux coupé par le segment $[AB]$.

Dans le cas où le circuit est fermé, on a $u_{AB} = 0$, $R_{AB} = R$, $I_{AB} = I$ et $d\Phi_c = d\Phi$ (d'après le théorème de Maxwell), ce qui permet de retrouver la loi de Faraday.

4.3.3. Loi de modération de Lenz

Tous les phénomènes précédents, et notamment le sens du courant induit, peuvent être compris par la **loi de modération de Lenz**, qui indique que **les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur ont donné naissance**. Plus précisément, le circuit génère des courants induits qui s'opposent à la variation du flux du champ magnétique à travers lui (c'est l'origine du signe – dans la loi de Faraday).

4.3.4. Bilan de puissance

Cas général

On s'intéresse à la puissance électromagnétique P_{fem} développée par la force électromotrice d'induction. En utilisant la loi de Faraday, on obtient que :

$$P_{\text{fem}} = e(t)I(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t)I(t) = -P_L, \quad (4.45)$$

ou encore que **la puissance développée par la force électromotrice** (en convention générateur) **est l'opposée de la puissance des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit.**

Par ailleurs, pour un circuit fermé, on peut obtenir un bilan de puissance en multipliant l'Éq. (4.40) par $I(t)$:

$$e(t)I(t) = RI(t)^2. \quad (4.46)$$

On reconnaît dans le membre de gauche la puissance P_{fem} développée par la force électromotrice d'induction, qui est entièrement dissipée par effet Joule (membre de droite).

Cas particulier de l'induction de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, c'est-à-dire d'un conducteur déplacé ou déformé dans un champ magnétique stationnaire, le déplacement du circuit génère une force électromotrice, et un courant est induit dans le circuit. Des forces de Laplace s'exercent alors sur le circuit, et travaillent de sorte à s'opposer à la variation de flux du circuit, c'est-à-dire au mouvement original du conducteur. C'est le principe de la **conversion électromécanique de puissance**, avec conversion d'une puissance électromagnétique (P_{fem}) en puissance électromécanique (P_L), avec **un rendement théorique égal à 1**. Il y a alors deux possibilités listées ci-dessous.

1. Un opérateur extérieur impose un mouvement au conducteur en appliquant une puissance mécanique $P_{\text{méca}} > 0$. Le conducteur baignant dans un champ magnétique, il y a alors génération d'un courant induit, et donc conversion de puissance mécanique en puissance électromécanique. En régime permanent, on obtient en appliquant le théorème de la puissance cinétique et en négligeant toute dissipation et toute autre action extérieure :

$$P_L + P_{\text{méca}} = 0, \quad (4.47)$$

où P_L est la puissance reçue par le système par l'action des forces de Laplace. Cette dernière est alors convertie, avec un rendement égal à 1 (voir Éq. (4.45)), en puissance électromagnétique. Puis cette puissance électromagnétique peut être fournie sous forme de puissance électrique à un dipôle entre deux points A et B , avec une partie perdue par effet Joule (voir Éq. (4.43)) :

$$\begin{aligned} e_{AB}I_{AB} &= -u_{AB}I_{AB} + R_{AB}I_{AB}^2 \\ P_{\text{fem}} &= P_{\text{élec}} + R_{AB}I_{AB}^2 \end{aligned}, \quad (4.48)$$

où $P_{\text{élec}} = -u_{AB}I_{AB}$ est la puissance électrique fournie au circuit extérieur en convention générateur. Si $P_{\text{méca}} > 0$ alors $P_L < 0$, $P_{\text{fem}} > 0$ et $P_{\text{élec}} > 0$: le système se comporte comme un **générateur électrique**.

2. Un opérateur fournit à l'aide d'un générateur extérieur une puissance électrique $P_{\text{élec}} = u_{AB}I_{AB} > 0$ au conducteur entre les points A et B en convention récepteur et impose donc un courant dans le conducteur. Le conducteur baignant dans un champ magnétique extérieur stationnaire, le passage du courant induit donc des forces de Laplace qui mettent en mouvement le conducteur, et créent également une force électromotrice d'induction. Une partie de la puissance électrique est

donc dissipée par effet Joule, tandis que le reste est convertie en puissance électromagnétique P_{fem} :

$$\begin{aligned} e_{AB}I_{AB} &= -u_{AB}I_{AB} + R_{AB}I_{AB}^2 \\ P_{\text{elec}} &= -P_{\text{fem}} + R_{AB}I_{AB}^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

puis en puissance électromécanique P_L (selon l'Éq. (4.45)). Finalement, cette puissance électromécanique est convertie en puissance mécanique $P_{\text{méca}}$ (selon l'Éq. (4.47)), car le conducteur est mis en mouvement. Si $P_{\text{elec}} > 0$ alors $P_{\text{fem}} < 0$, $P_L > 0$ et $P_{\text{méca}} < 0$: le conducteur cède de la puissance mécanique à l'extérieur, et se comporte donc comme un **moteur**.

C'est le principe des machines à courant continu (moteur et génératrice), dont les rendements peuvent être très grands (de l'ordre de 80%). En particulier, le rendement de ces machines n'est pas limité théoriquement, contrairement aux machines thermiques (dont le rendement théorique est limité par le théorème de Carnot). Les pertes de rendement sont dues à l'effet Joule déjà mentionné, mais également aux pertes mécaniques, ainsi qu'à d'autres types de pertes (notamment les pertes fer) qui dépendent de la géométrie et de la constitution de la machine.

4.3.5. Résolution d'un problème d'induction pour un circuit fermé

Induction de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann, le circuit est fixe dans un champ magnétique variable. La résolution du problème d'induction se fait de la façon suivante :

1. Orienter le circuit : ceci fixe alors l'orientation de la surface sous-tendue par le circuit fermé et l'intensité.
Attention, cela ne préjuge en rien du signe de l'intensité.
2. Calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit.
3. En déduire la force électromotrice par la loi de Faraday (4.39).
4. Appliquer la loi d'Ohm (4.40) pour en déduire le courant induit.
5. Conclure.

Induction de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, le circuit est mobile dans un champ magnétique stationnaire. La résolution du problème d'induction se fait de la façon suivante :

1. Orienter le circuit : ceci fixe alors l'orientation de la surface sous-tendue par le circuit fermé et l'intensité.
Attention, cela ne préjuge en rien du signe de l'intensité.
2. Écrire la loi de la dynamique pour le circuit faisant intervenir la force de Laplace (4.6) afin d'obtenir une première relation entre la vitesse du conducteur et le courant induit.
3. Calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit, en déduire la force électromotrice par la loi de Faraday (4.39) et appliquer la loi d'Ohm (4.40) pour obtenir une seconde relation entre le courant induit et la vitesse du conducteur.
4. Conclure.

4.4. Autoinductance et inductance mutuelle

4.4.1. Autoinductance

Flux propre et coefficient d'autoinduction

On considère un circuit \mathcal{C} fermé orienté parcouru par un courant I . Ce dernier crée un champ magnétique, et on définit le **flux propre** Φ_{propre} comme le flux du champ magnétique créé par le circuit

à travers lui-même. L'intensité du champ magnétique étant proportionnelle au courant parcourant le circuit (d'après la loi de Biot et Savart), on peut l'écrire de façon générique :

$$\Phi_{\text{propre}} = LI, \quad (4.50)$$

où L est un coefficient qui **dépend uniquement de la géométrie du conducteur**, qui s'appelle le **coefficient d'autoinductance** ou l'**inductance propre** du circuit. Le coefficient d'autoinductance s'exprime en Henry (H) dans les unités du système international.

Il est important de noter que Φ_{propre} et I dépendent de l'orientation du circuit, mais pas L qui est **toujours positif**.

Un calcul direct de l'inductance propre d'un circuit amène souvent à un coefficient L infini, car le champ magnétique est divergent sur le circuit. On préfère donc une autre définition du coefficient d'autoinduction, reposant sur l'énergie magnétique stockée dans le circuit (voir plus loin).

Force électromotrice d'autoinduction

Le circuit \mathcal{C} étant le siège d'un flux propre, en vertu de la loi de Faraday apparaît une force électromotrice d'autoinduction :

$$e = -\frac{d\Phi_{\text{propre}}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}, \quad (4.51)$$

la seconde égalité étant obtenue si le coefficient d'autoinduction est indépendant du temps.

Il existe deux situations dans lesquelles L peut dépendre du temps :

- ▶ le circuit se déforme,
- ▶ l'inductance propre L dépend du courant I lui-même (ce qui peut être le cas en présence de carcasse magnétique, par exemple un noyau de fer doux).

Cette force électromotrice s'oppose à la variation de I et interdit donc toute discontinuité de l'intensité : c'est pour cela que **le courant traversant une bobine est toujours continu**. Le circuit est donc équivalent au schéma électrocinétique de la Fig. 4.6, en particulier :

$$u = -e + rI = L\frac{dI}{dt} + rI, \quad (4.52)$$

en notant r la résistance du bobinage et u la tension à ses bornes en convention récepteur. On retrouve bien la **loi constitutive d'une bobine non idéale en convention récepteur**.

Le signe $-$ intervenant dans l'Éq. (4.51) vient du fait que la force électromotrice est orientée en convention générateur, alors qu'une bobine est usuellement représentée en convention récepteur.

Énergie magnétique d'autoinduction

On calcule la puissance dans le circuit en convention récepteur, en négligeant l'effet Joule :

$$P = uI = LI\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right), \quad (4.53)$$

la dernière égalité étant obtenue en supposant que L ne dépend pas du temps. On trouve donc que de l'énergie magnétique est stockée dans le circuit, et cette énergie s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}LI^2. \quad (4.54)$$

En vertu de l'Éq. (4.31), on constate que le travail élémentaire des forces de Laplace dues au champ propre, qui sont des **forces internes au système**, est égal à la différentielle de E_m :

$$\delta W_L = I d\Phi = LI dI = d\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = dE_m, \quad (4.55)$$

en supposant de nouveau L constant. C'est une manifestation de l'Éq. (4.45).

Cette énergie magnétique stockée peut se réécrire sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}I\Phi_{\text{propre}}, \quad (4.56)$$

et on constate un facteur 1/2 supplémentaire par rapport à l'Éq. (4.35), qui vient du fait que le champ magnétique est créé par le courant I lui-même. Le changement de signe vient du fait qu'on s'est placé en convention récepteur pour le circuit (voir également le changement de signe dans l'Éq. (4.55) par rapport à l'Éq. (4.34)).

L'Éq. (4.54) donne une autre définition de l'inductance propre, qui ne donne pas des valeurs divergentes comme l'expression du flux propre. Elle permet également de généraliser la définition de l'inductance propre à des distributions surfaciques et volumiques, à condition de pouvoir calculer l'énergie magnétique d'une autre manière. Il existe une autre manière de calculer l'énergie liée au champ magnétique propre, analogue à celle pour le champ électrostatique :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{B}^2(M) dV, \quad (4.57)$$

qu'on démontrera plus tard (voir Sec. 4.5.3).

4.4.2. Inductance mutuelle

Flux d'inductance mutuelle

On considère maintenant deux circuits orientés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 respectivement parcourus par des intensités I_1 et I_2 . Le champ magnétique qui règne dans l'espace est alors la superposition des champs magnétiques \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 créés par les deux circuits. Quand on calcule le flux Φ_1 du champ magnétique à travers le circuit \mathcal{C}_1 , on obtient de façon générale :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2, \quad (4.58)$$

où le premier terme correspond au flux propre, et le second au flux de \mathbf{B}_2 à travers \mathcal{C}_1 . De façon équivalente, pour le circuit \mathcal{C}_2 , on obtient :

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1, \quad (4.59)$$

où M_{12} et M_{21} sont les **inductances mutuelles**, qui s'expriment en Henry (H) dans les unités du système international.

Formule de Neumann

On peut obtenir une expression du coefficient d'inductance mutuelle M_{12} en calculant le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ magnétique \mathbf{B}_1 créé par \mathcal{C}_1 à travers le circuit \mathcal{C}_2 :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{M \in \mathcal{C}_2} \mathbf{B}_1(M) \cdot d\mathbf{S}_2, \quad (4.60)$$

où \mathcal{S}_2 est la surface délimitée par le second circuit. En introduisant le potentiel vecteur \mathbf{A}_1 puis en utilisant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \oint_{M \in \mathcal{C}_2} \mathbf{A}_1(M) \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (4.61)$$

On peut alors utiliser la loi de Biot et Savart pour le potentiel vecteur, qui reste correcte dans l'ARQS magnétique, et on aboutit à :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{P \in \mathcal{C}_1} \oint_{M \in \mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\|\mathbf{PM}\|}. \quad (4.62)$$

On reconnaît donc le coefficient d'inductance mutuelle :

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \mathcal{C}_1} \oint_{M \in \mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\|\mathbf{PM}\|}. \quad (4.63)$$

On peut alors en tirer plusieurs conséquences, listées ci-dessous.

- La formule est **symétrique** :

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (4.64)$$

où M est le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux circuits.

- Le coefficient d'inductance mutuelle M **dépend uniquement de la géométrie des deux circuits et de leur distance relative**.
- Contrairement à l'inductance propre, l'inductance mutuelle est **de signe arbitraire**, car si on change l'orientation d'un circuit, alors M change de signe.

Énergie magnétique d'inductance mutuelle

On peut calculer le travail des actions internes de Laplace du système constitué des deux circuits, en utilisant l'Éq. (4.31), et en supposant que les inductances propres et mutuelles sont indépendantes du temps :

$$\delta W_L = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 + M I_2 dI_1 = d \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \right). \quad (4.65)$$

On reconnaît donc l'énergie magnétique stockée dans les deux circuits :

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + M I_1 I_2. \quad (4.66)$$

Par ailleurs, l'énergie magnétique est toujours donnée par l'Éq. (4.57) avec $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, ce qui montre que $E_m > 0$ et que cette énergie s'annule si le champ magnétique est uniformément nul. Ainsi, E_m est une forme quadratique fonction des deux courants qui est **définie positive**. Étant symétrique, elle est diagonalisable, à valeurs propres réelles, ce qui impose que ses deux valeurs propres soient strictement positives, ou encore que sa trace et son déterminant le soient. Sa trace est $\tau = L_1 + L_2$ qui est positive car on a vu précédemment que les coefficients d'autoinduction étaient obligatoirement positifs. Son déterminant, quant à lui, vaut $\Delta = L_1 L_2 - M^2$, ce qui impose que :

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.67)$$

l'égalité étant obtenue lorsque le couplage magnétique entre les deux circuits est parfait. On définit parfois le **coefficient de couplage** k entre deux circuits magnétiques :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (4.68)$$

compris entre 0 (couplage nul) et 1 (couplage parfait).

Le signe de M étant arbitraire, on a bien une condition qui porte sur $|M|$ (ou M^2).

4.5. Approche fondamentale de l'induction (HP)

4.5.1. Équations de Maxwell dans le vide dans l'ARQS magnétique

Nous avons déjà mentionné dans le chapitre précédent que dans l'ARQS magnétique, on suppose que les effets de propagation peuvent être négligés et que les effets magnétiques dominent les effets électriques. Dans ce cas, le champ magnétique est calculé comme en magnétostatique, et vérifie les équations de Maxwell de la magnétostatique :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B}(M, t) = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}(M, t) = \mu_0 \mathbf{j}(M, t) \end{cases} \quad (4.69)$$

Le champ électrique est lui calculé par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t). \quad (4.70)$$

Enfin, la densité volumique de charges est reliée au champ électrique par l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}, \quad (4.71)$$

tandis que l'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(M, t) = 0. \quad (4.72)$$

4.5.2. Existence des potentiels scalaire et vecteur

Le champ magnétique vérifie l'équation de Maxwell-Thomson, ainsi il dérive d'un potentiel vecteur :

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t), \quad (4.73)$$

où le potentiel vecteur est défini à une transformation de jauge près. Par la suite, on se placera dans la jauge de Coulomb :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M, t) = 0. \quad (4.74)$$

En injectant l'Éq. (4.73) dans l'Éq. (4.70), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) &= -\frac{\partial(\nabla \wedge \mathbf{A})}{\partial t}(M, t) \\ \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (M, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.75)$$

On en déduit donc que le terme entre parenthèses dérive d'un potentiel scalaire, qu'on note $V(M, t)$ par analogie avec l'électrostatique, de sorte que le champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t). \quad (4.76)$$

Dans l'ARQS magnétique, le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel scalaire. Par contre, en régime permanent, on retrouve bien la définition du potentiel électrostatique.

4.5.3. Énergie magnétique d'une distribution de courants

On considère une distribution bornée de courants occupant un volume Σ . Ces courants sont dûs aux mouvements des porteurs de charge, qui subissent la force de Lorentz. La composante magnétique ne travaillant pas (car orthogonale au déplacement), la puissance volumique reçue par la distribution de courants s'écrit :

$$p = \sum_{j=1}^p n_j \mathbf{v}_j \cdot [q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B})] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.77)$$

en considérant que la distribution de courants contient p porteurs de charge, de charge q_j ($j = 1, \dots, p$), de densité numérique n_j et de vitesse de dérive \mathbf{v}_j . La puissance totale reçue par la distribution de courants s'écrit alors :

$$\begin{aligned} P &= \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \mathbf{E}(M, t) dV \\ &= \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \left[-\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \right] dV, \\ &= - \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \nabla V(M, t) dV - \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) dV \end{aligned} \quad (4.78)$$

où on a utilisé l'Éq. (4.76) pour exprimer le champ électrique. La première intégrale peut être étendue sur tout volume \mathcal{V} contenant strictement la distribution. En utilisant la conservation de la charge et le théorème de Green-Ostrogradski, ce premier se réécrit en une intégrale de surface sur la surface fermée \mathcal{S} délimitant le volume \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \nabla V(M, t) dV &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{j}V)(M, t) dV \\ &= \oint_{M \in \mathcal{S}} V(M, t) \mathbf{j}(M, t) \cdot d\mathbf{S}, \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

car \mathbf{j} est nul sur la frontière de \mathcal{V} . On obtient donc finalement :

$$P = - \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) dV, \quad (4.80)$$

soit pour le travail reçu pendant dt :

$$\delta W = - \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) dt \right] dV. \quad (4.81)$$

Pour le moment, nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'origine du champ magnétique (ou du potentiel vecteur). Nous allons maintenant nous intéresser à l'énergie propre d'une distribution de courants, et supposer que le potentiel vecteur est celui créé par la distribution de courants elle-même. Dans ce cas, \mathbf{A} s'exprime linéairement en fonction de \mathbf{j} (en vertu de la loi de Biot et Savart), et cela revient à dire que le travail élémentaire précédent dérive d'une énergie potentielle qui s'écrit :

$$\delta W = -dE_m, \quad (4.82)$$

Le signe – provient ici du fait que le travail calculé ici est celui de la force électromotrice d'induction, qui est l'opposé du travail des forces de Laplace.

avec

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint_{M \in \Sigma} \mathbf{j}(M, t) \cdot \mathbf{A}(M, t) dV. \quad (4.83)$$

Cette équation est l'analogie magnétique de l'énergie électrostatique d'une distribution de charges :

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_{M \in \Sigma} \rho(M, t) V(M, t) dV, \quad (4.84)$$

valable en électrostatique ou dans l'ARQS électrique.

On souhaite maintenant trouver une autre expression de l'énergie magnétique. Pour cela, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS magnétique, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})}{\mu_0}. \quad (4.85)$$

On utilise alors la formule de la divergence du produit vectoriel, ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})] = \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} - \frac{\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})}{\mu_0}. \quad (4.86)$$

Cela permet donc de réécrire l'Éq. (4.83) sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \Sigma} [\mathbf{B}^2(M, t) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})(M, t)] dV. \quad (4.87)$$

On peut alors étendre cette intégrale sur tout volume \mathcal{V} contenant strictement la distribution, par exemple une boule de rayon R . On réécrit le second membre à partir du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \iiint_{M \in \Sigma} \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})(M, t) dV &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})(M, t) dV \\ &= \oint_{M \in \mathcal{S}} [\mathbf{A}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}, \quad (4.88)$$

où \mathcal{S} désigne la surface délimitée par le volume \mathcal{V} , c'est-à-dire la sphère de rayon R . À grande distance $\|\mathbf{A}\|$ varie comme $1/R^2$, $\|\mathbf{B}\|$ varie comme $1/R^3$ ¹, et $\|d\mathbf{S}\|$ comme R^2 . Ainsi, ce second terme varie au moins comme $1/R^3$ et tend donc vers 0 quand R tend vers $+\infty$. Ceci permet de conclure que :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{B}^2(M, t) dV, \quad (4.89)$$

où contrairement à l'Éq. (4.83), ici l'intégration porte **sur tout l'espace**.

Cette équation est l'analogie de la formule donnant l'énergie électrique :

$$E_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{M \in \text{espace}} \mathbf{E}^2(M, t) dV, \quad (4.90)$$

valable en électrostatique et dans l'ARQS électrique.

1. En effet, il n'existe pas de monopôle magnétique, donc le premier terme dans le développement limité à grande distance est le terme dipolaire.

4.5.4. Loi d'Ohm locale généralisée

On considère un volume $d\tau$ de conducteur en mouvement et on étudie le mouvement des porteurs de charge à l'intérieur de ce volume. On considère deux référentiels : le référentiel \mathcal{R}^* qui est le référentiel dans lequel l'élément de volume $d\tau$ est au repos (son référentiel barycentrique), et le référentiel \mathcal{R} du laboratoire. Le premier est alors en translation rectiligne et uniforme à la vitesse \mathbf{V} par rapport au second localement en temps, et par la suite on suppose ces deux référentiels galiléens.

Nous devons nous contenter d'étudier un élément infinitésimal de conducteur, car tous les points du conducteur ne bougent pas a priori avec la même vitesse : le conducteur n'est pas forcément en mouvement de translation rectiligne.

Les porteurs de charge subissent alors la force de Lorentz. On suppose également que les porteurs de charge subissent une force de friction semblable à une force de frottement fluide, qui tient compte des interactions entre porteurs de charge entre-eux, et avec les espèces non chargées, ainsi que des sources d'amortissement du mouvement des porteurs de charge. Dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique appliqué aux porteurs de charge donne, dans le référentiel \mathcal{R} :

$$m_j \left. \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}) - \frac{m_j}{\tau_j} \mathbf{v}_j^*, \quad (4.91)$$

où \mathbf{v}_j^* est la vitesse relative des porteurs de charge j ($j = 1, \dots, p$) par rapport au conducteur, m_j la masse du porteur j , q_j sa charge et τ_j une constante homogène à un temps. Le membre de gauche s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \simeq (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j, \quad (4.92)$$

la dernière approximation résultant de l'ARQS magnétique. Par ailleurs, en terme d'ordre de grandeur, on a :

$$\frac{m_j \|(\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j\|}{|q_j| \|\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}\|} \simeq \frac{m_j \|\mathbf{v}_j\|}{q_j L \|\mathbf{B}\|}, \quad (4.93)$$

où L est la taille typique du conducteur. Pour un champ magnétique de l'ordre de 1 T, un conducteur de $L \simeq 1$ m, et en utilisant l'ordre de grandeur connu de la vitesse de dérive des électrons ($m_j \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg, $q_j = 1,6 \times 10^{-19}$ C, et $\|\mathbf{v}_j\| \simeq 10^{-4} \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), on obtient que le précédent rapport est de l'ordre de 10^{-15} , qui est donc très petit devant 1. Ainsi, l'Éq. (4.91) se réécrit sous la forme :

$$q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}) - \frac{m_j}{\tau_j} \mathbf{v}_j^* = \mathbf{0} \iff \mathbf{v}_j^* = \frac{q_j \tau_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}). \quad (4.94)$$

À partir de l'équation précédente, on en déduit la vitesse des porteurs de charge dans le référentiel \mathcal{R} par la formule de composition des vitesses $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j^* + \mathbf{V}$, ainsi que par la relation connue entre la densité volumique de courants et la vitesse des porteurs :

$$\mathbf{j} = \sum_{j=1}^p n_j q_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^p n_j q_j \mathbf{V} + \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}). \quad (4.95)$$

Le terme faisant intervenir \mathbf{V} s'annule par électroneutralité, soit finalement :

$$\mathbf{j} = \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{B}). \quad (4.96)$$

En l'absence de champ magnétique, ou dans le cas où les effets magnétiques sont négligeables devant les effets électriques, on retrouve la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.97)$$

où :

$$\sigma = \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j}, \quad (4.98)$$

est la conductivité électrique du conducteur.

4.5.5. Induction de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann, le conducteur est fixe, tandis que le champ magnétique est variable. Dans ce cas, $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, et l'Éq. (4.96) se réécrit :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \mathbf{v}_j^* \wedge \mathbf{B}, \quad (4.99)$$

où on a introduit la conductivité σ du conducteur, donnée par :

$$\sigma = \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j}. \quad (4.100)$$

On intègre alors cette relation sur un circuit \mathcal{C} fermé orienté :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{j}(M, t)}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \oint_{M \in \mathcal{C}} (\mathbf{v}_j^* \wedge \mathbf{B}(M, t)) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.101)$$

On peut calculer le premier terme, en notant s la section du conducteur filiforme :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{j}(M, t)}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{I}{s\sigma} d\ell = RI, \quad (4.102)$$

où $R = \oint_{M \in \mathcal{C}} d\ell / \sigma s$ est la résistance du circuit. On peut calculer le second terme, en remarquant qu'en régime permanent \mathbf{v}_j^* est colinéaire à $d\boldsymbol{\ell}$. Ainsi, en utilisant les propriétés du produit mixte, on obtient :

$$\sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \oint_{M \in \mathcal{C}} (\mathbf{v}_j^* \wedge \mathbf{B}(M, t)) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \oint_{M \in \mathcal{C}} (d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{v}_j^*) \cdot \mathbf{B}(M, t) = 0. \quad (4.103)$$

Le troisième terme peut aussi être calculé en utilisant l'expression (4.76) du champ électrique :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_{M \in \mathcal{C}} \nabla V(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} - \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell}, \quad (4.104)$$

le premier terme s'annulant car on intègre un gradient sur un contour fermé. Par la suite, on définit la force électromotrice dans le cas de l'induction de Neumann :

$$e(t) = - \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.105)$$

Le contour étant fixe, on peut simplifier l'expression de la force électromotrice en sortant la dérivée temporelle à l'extérieur de l'intégration, puis en utilisant le théorème de Stokes :

$$e(t) = - \frac{d}{dt} \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{A}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_{M \in \mathcal{S}} (\nabla \wedge \mathbf{A}(M, t)) \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.106)$$

en notant \mathcal{S} la surface délimitée par le contour \mathcal{C} . On retrouve alors le théorème de Faraday (voir l'Éq. (4.39)) :

$$e = -\frac{d}{dt} \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}(t), \quad (4.107)$$

ainsi que la loi d'Ohm globale (Éq. (4.40)).

Même si l'Éq. (4.105) peut laisser croire que la force électromotrice dépend du choix de jauge, le théorème de Faraday montre en réalité que ce n'est pas le cas.

4.5.6. Induction de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, le conducteur est mobile dans un champ magnétique stationnaire. Dans ce cas, on peut prendre un potentiel vecteur indépendant du temps, de sorte que le champ électrique donné par l'Éq. (4.76) se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\nabla V(M, t), \quad (4.108)$$

tandis que l'Éq. (4.96) prend l'expression :

$$\mathbf{j}(M, t) = \sigma [-\nabla V(M, t) + \mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] + \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \mathbf{v}_j^*(t) \wedge \mathbf{B}(M, t), \quad (4.109)$$

où nous avons utilisé la formule de composition classique des vitesses. On considère maintenant une portion de conducteur $[AB]$, et on intègre de nouveau la loi d'Ohm locale :

$$\int_{M \in [AB]} \frac{\mathbf{j}(M, t)}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_{M \in [AB]} \nabla V(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{M \in [AB]} [\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\boldsymbol{\ell} + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} [\mathbf{v}_j^*(t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.110)$$

Le premier terme se calcule comme pour l'Éq. (4.102), tandis que le dernier terme s'annule (voir l'Éq. (4.103)). L'équation précédente redonne alors l'Éq. (4.43), en notant :

$$u_{AB}(t) = - \int_{M \in [AB]} \nabla V(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = V(A, t) - V(B, t), \quad (4.111)$$

et en introduisant la force électromotrice d'induction de Lorentz :

$$e_{AB}(t) = \int_{M \in [AB]} [\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.112)$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, on peut transformer l'expression de la force électromotrice d'induction :

$$e_{AB}(t) = - \int_{M \in [AB]} [\mathbf{V}(M, t) \wedge d\boldsymbol{\ell}] \cdot \mathbf{B}(M, t), \quad (4.113)$$

où on reconnaît l'expression du flux coupé (voir l'Éq. (4.24)), ce qui permet de retrouver la loi de Faraday (voir l'Éq. (4.44)) :

$$e_{AB}(t) = -\frac{d\Phi_c}{dt}(t). \quad (4.114)$$

4.5.7. Cas général d'un circuit déplacé dans un champ magnétique variable

Dans le cas le plus général, l'Éq. (4.96) associée à l'Éq. (4.76) donne :

$$\mathbf{j}(M, t) = \sigma \left[-\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) + \mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t) \right] + \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \mathbf{v}_j^*(t) \wedge \mathbf{B}(M, t). \quad (4.115)$$

On intègre alors cette équation sur tout le contour fermé \mathcal{C} constituant le circuit, et on obtient :

$$\begin{aligned} \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{j}(M, t)}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= - \oint_{M \in \mathcal{C}} \nabla V(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} - \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &+ \oint_{M \in \mathcal{C}} [\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\boldsymbol{\ell} + \sum_{j=1}^p \frac{n_j q_j^2 \tau_j}{m_j} \oint_{M \in \mathcal{C}} [\mathbf{v}_j^*(t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\boldsymbol{\ell}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

En utilisant l'Éq. (4.102), l'Éq. (4.103), ainsi que le fait que l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé est nul, on obtient :

$$RI(t) = \oint_{M \in \mathcal{C}} \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) + [\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] \right] \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.117)$$

On définit alors la forme électromotrice d'induction dans le cas général par l'expression :

$$e(t) = \oint_{M \in \mathcal{C}} \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) + \mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t) \right] \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.118)$$

On retrouve bien les cas d'induction de Lorentz et Neumann en prenant \mathbf{A} indépendant du temps ou $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ respectivement.

Pour parachever la preuve, il reste à montrer la loi de Faraday (Éq. (4.39)). Pour cela, on calcule la variation infinitésimale du flux du champ magnétique, en notant $\mathcal{S}(t)$ la surface délimitée par le contour (qui dépend du temps) :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \iint_{M \in \mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(M, t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{M \in \mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} [\mathbf{B}(M, t+dt) - \mathbf{B}(M, t)] \cdot d\mathbf{S}, \\ &= \iint_{M \in \mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S} dt \end{aligned} \quad (4.119)$$

en se contentant d'un développement limité à l'ordre 1. En utilisant le même raisonnement que dans la Sec. 4.2.2, on obtient que la différence des deux premiers termes donne le flux coupé, soit :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \iint_{M \in \mathcal{S}_c(t)} \mathbf{B}(M, t) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S} dt \\ &= \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M, t) \cdot (\mathbf{V}(M, t) dt \wedge d\boldsymbol{\ell}) + \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \frac{\partial(\nabla \wedge \mathbf{A})}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S} dt, \end{aligned} \quad (4.120)$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant la définition du flux coupé (voir l'Éq. (4.24)), ainsi que le lien entre le champ magnétique et le potentiel vecteur. Pour le premier terme, on utilise les propriétés du produit mixte :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M, t) \cdot (\mathbf{V}(M, t) dt \wedge d\boldsymbol{\ell}) = - \oint_{M \in \mathcal{C}} d\boldsymbol{\ell} \cdot [\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t)] dt. \quad (4.121)$$

Pour le second terme, on intervertit le rotationnel avec la dérivée temporelle dans le second terme, puis on utilise le théorème de Stokes :

$$\iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \frac{\partial(\nabla \wedge \mathbf{A})}{\partial t}(M, t) \cdot d\mathbf{S} dt = \iint_{M \in \mathcal{S}(t)} \nabla \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)(M, t) \cdot d\mathbf{S} dt = \oint_{M \in \mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} dt. \quad (4.122)$$

On trouve donc finalement :

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \oint_{M \in \mathcal{C}} d\boldsymbol{\ell} \cdot \left[-\mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) \right] = -e(t), \quad (4.123)$$

donnée par l'expression (4.118) de la force électromotrice, ce qui prouve le théorème de Faraday.

4.5.8. Champ électromoteur

On définit le champ électromoteur \mathbf{E}_m comme le champ de vecteurs tel que :

$$e(t) = \oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{E}_m(M, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (4.124)$$

pour un circuit fermé.

Induction de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann, le champ électromoteur a l'expression :

$$\mathbf{E}_m(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t). \quad (4.125)$$

Ce dernier a plusieurs propriétés qu'il convient de signaler.

- ▶ C'est une composante du champ électrique, mais **ce n'est pas le champ électrique**.
- ▶ Le champ électromoteur de Neumann **dépend du choix de jauge**, en particulier il n'a aucune signification physique.

Induction de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, le champ électromoteur a l'expression :

$$\mathbf{E}_m(M, t) = \mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t). \quad (4.126)$$

Ce dernier a plusieurs propriétés qu'il convient de signaler.

- ▶ **Ce n'est pas une composante du champ électrique**, il dérive du champ magnétique, contrairement à l'induction de Neumann.
- ▶ Le champ électromoteur de Lorentz **ne dépend pas du choix de jauge**, contrairement au champ électromoteur de Neumann.
- ▶ On l'interprète physiquement comme le champ électrique équivalent tel que la force de Lorentz subie par un porteur de charge de charge q s'écrit :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m). \quad (4.127)$$

À l'équilibre (sans courant), $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, et donc un champ électrique $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_m$ s'établit dans le conducteur.

Cas général

Dans le cas général, le champ électromoteur s'écrit :

$$\mathbf{E}_m(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) + \mathbf{V}(M, t) \wedge \mathbf{B}(M, t). \quad (4.128)$$

Ce dernier a plusieurs propriétés qu'il convient de signaler.

- ▶ Il contient une composante du champ électrique, mais aussi un terme qui dépend du champ magnétique.
- ▶ Le champ électromoteur **dépend du choix de jauge**, et n'a donc aucune signification physique.

5. Électromagnétisme dans le vide

5.1. Conservation de la charge

5.1.1. Formulation globale

On considère une région de l'espace présentant des charges et des courants volumiques de densités respectives $\rho(M, t)$ et $\mathbf{j}(M, t)$. Comme en magnétostatique, on isole un tube de courant \mathcal{V} , c'est-à-dire un tube de champ de la densité volumique de courants $\mathbf{j}(M, t)$, délimité par la surface fermée \mathcal{S} . On note \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 les bases du tube de courant orienté de \mathcal{S}_1 vers \mathcal{S}_2 .

On note Q la charge totale dans ce tube de courant. La charge étant conservée, sa variation pendant dt est égale à la différence entre la quantité de charges entrante et celle sortante, autrement dit :

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{M \in \mathcal{S}_1} \mathbf{j}(M, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{M \in \mathcal{S}_2} \mathbf{j}(M, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.1)$$

En utilisant que par définition d'un tube de courant, le flux de \mathbf{j} à travers la surface latérale est nul, on obtient que :

$$\frac{dQ}{dt} = - \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M, t) \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.2)$$

le signe $-$ venant du fait que les surfaces sont conventionnellement orientées vers l'extérieur.

On exprime ensuite la charge totale Q en fonction de ρ :

$$Q = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M, t) dV, \quad (5.3)$$

dont on peut calculer la dérivée par rapport au temps, le volume \mathcal{V} étant fixe :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) dV. \quad (5.4)$$

On obtient finalement la relation de conservation de la charge :

$$\boxed{\iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) dV = - \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M, t) \cdot d\mathbf{S},} \quad (5.5)$$

qui est valable pour toute surface fermée \mathcal{S} délimitant un volume \mathcal{V} (car on peut décomposer ce dernier en tubes de courant).

5.1.2. Formulation locale

Pour obtenir la formulation locale de la conservation de la charge, on utilise le théorème de Green-Ostrogradski pour transformer l'intégrale surfacique dans le membre de droite en intégrale volumique :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) dV = - \iiint_{M \in \mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{j}(M, t) \cdot dV. \quad (5.6)$$

Cette formule étant valable pour tout volume \mathcal{V} , les intégrandes doivent être égales, soit l'**équation de conservation de la charge** :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(M, t) = 0.} \quad (5.7)$$

Cette équation est l'archétype d'une **équation de conservation**, où le premier terme correspond à la dérivée temporelle de la densité de la grandeur conservée, le second à un terme de transport qui s'écrit comme la divergence d'un vecteur densité de flux. Le membre de droite, ici nul, décrit des éventuels processus de création ou de destruction de la quantité conservée, par exemple en présence d'interactions.

On retrouve la conservation de la charge en magnétostatique en posant que la dérivée de ρ par rapport au temps est nulle.

5.2. Équations de Maxwell

On réécrit les équations de Maxwell dans le cas général de sources dépendant du temps, en dehors de toute approximation.

5.2.1. Équation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est inchangée par rapport à l'électrostatique, c'est-à-dire que :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}. \quad (5.8)$$

Il en résulte que le théorème de Gauss reste valable en électromagnétisme, même s'il est plus difficile à appliquer du fait du couplage avec le champ magnétique (voir l'Éq. (5.10)).

5.2.2. Équation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson est elle-aussi inchangée par rapport à la magnétostatique, soit :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(M, t) = 0. \quad (5.9)$$

Le champ magnétique reste donc à flux conservatif en électromagnétisme, ce qui traduit l'**absence de monopôles magnétiques**.

5.2.3. Équation de Maxwell-Faraday

Nous avons déjà mentionné que l'équation de Maxwell-Faraday, telle qu'écrite en électrostatique n'était plus vraie. Elle fait maintenant apparaître le couplage avec le champ magnétique (à la base du phénomène d'induction électromagnétique) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M, t). \quad (5.10)$$

Cette équation au rotationnel **couple le champ électrique avec le champ magnétique** : une variation temporelle du champ magnétique peut induire un champ électrique. On en déduit donc qu'il existe maintenant deux sources de champ électrique : les distributions de charges, et un champ magnétique variable.

Ce couplage entre les champs électrique et magnétique rend difficile la distinction entre ces deux champs, on parle alors de **champ électromagnétique** (\mathbf{E}, \mathbf{B}).

Ce couplage devient encore plus évident quand on écrit l'électromagnétisme avec les notations de la relativité restreinte : c'est l'électrodynamique classique. Dans ce cadre, les champs électrique et magnétique sont les composantes du tenseur électromagnétique de Maxwell $F_{\mu\nu}$. De la même manière, les sources forment

un quadrivecteur J_μ dont la composante temporelle est la densité de charges multipliée par la célérité de la lumière dans le vide, tandis que les composantes spatiales sont les composantes de la densité de courants.

5.2.4. Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère change également quand on sort de l'ARQS magnétique. Pour que les équations de Maxwell soient compatibles avec la conservation de la charge (voir Sec. 5.3.2), on montre que l'équation de Maxwell-Ampère doit maintenant s'écrire sous la forme :

$$\nabla \wedge \mathbf{B}(M, t) = \mu_0 \mathbf{j}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M, t). \quad (5.11)$$

Comme l'équation de Maxwell-Faraday, cette équation au rotationnel couple le champ électrique au champ magnétique. On en déduit donc qu'il existe là aussi deux sources du champ magnétique : les distributions de courants, et un champ électrique variable. À l'inverse, on remarquera que les équations à la divergence (Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère) ne couplent pas les champs électrique et magnétique.

Historiquement, le terme $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, homogène à une densité volumique de courants, porte le nom de courant de déplacement. C'est lui qui est ajouté dans les équations de Maxwell pour être compatible avec la conservation de la charge, et qui correspond à une source supplémentaire du champ magnétique.

5.3. Propriétés des équations de Maxwell

5.3.1. Principe de superposition

Les équations de Maxwell sont des équations linéaires vis-à-vis des sources et des champs. Cela signifie qu'il existe un **principe de superposition** : si le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ est solution des équations de Maxwell en présence des sources (ρ_1, \mathbf{j}_1) , et si le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ est solution des équations de Maxwell en présence des sources (ρ_2, \mathbf{j}_2) , alors le champ électromagnétique $(\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2, \alpha_1 \mathbf{B}_1 + \alpha_2 \mathbf{B}_2)$ sera solution des équations de Maxwell en présence des sources $(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \mathbf{j}_1 + \alpha_2 \mathbf{j}_2)$.

5.3.2. Conservation de la charge

On vérifie maintenant que les équations de Maxwell sont compatibles avec la conservation de la charge. Pour cela, on prend la dérivée par rapport au temps de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.12)$$

On utilise alors l'équation de Maxwell-Ampère, dont on prend la divergence :

$$0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (5.13)$$

la divergence d'un rotationnel étant nulle. En permutant la divergence et la dérivée par rapport au temps (théorème de Schwarz), on obtient par l'équation précédente :

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (5.14)$$

et donc l'Éq. (5.7), en réinjectant l'Éq. (5.14) dans l'Éq. (5.12).

Attention, on ne démontre pas la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. La conservation de la charge est une propriété différente des équations de Maxwell, mais ces dernières doivent être compatibles avec la première.

5.3.3. Conservation de l'énergie

Nous voulons par la suite obtenir une équation décrivant la conservation de l'énergie portée par le champ électromagnétique. En vertu de ce qu'on a vu lors de l'écriture de la conservation de la charge, on sait que l'équation de conservation de l'énergie doit s'écrire de façon générique sous la forme :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \sigma, \quad (5.15)$$

où u_{em} désigne la densité volumique d'énergie du champ électromagnétique, $\mathbf{\Pi}$ le vecteur densité de flux qui décrit le transport d'énergie électromagnétique, et σ un terme de source qui représente la puissance volumique cédée par le champ. Ce dernier décrit l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière, notamment le fait que le champ électrique accélère les charges. Ainsi, on s'attend à ce que le champ électromagnétique cède de l'énergie à la matière, et donc que $\sigma < 0$. Par ailleurs, on a déjà calculé dans le chapitre d'induction la puissance volumique p cédée par le champ à la matière, qui s'écrivait $p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Ainsi, on s'attend à ce que la loi de conservation de l'énergie du champ électromagnétique s'écrive sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E},} \quad (5.16)$$

où on rappelle que u_{em} désigne la **densité volumique d'énergie électromagnétique** et $\mathbf{\Pi}$ le **vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique** traduisant le transport d'énergie.

Il reste alors à expliciter les termes u_{em} et $\mathbf{\Pi}$. Pour cela, on utilise l'Éq. (5.11) dont on prend le produit scalaire par le champ électrique :

$$\begin{aligned} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} &= \mu_0 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \mu_0 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} \\ -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pour poursuivre, il faut écrire le premier terme du membre de droite comme la divergence d'un champ de vecteurs. Pour cela, on utilise l'expression connue de la divergence du produit vectoriel de deux champs de vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} :

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b}). \quad (5.18)$$

Ainsi, on obtient :

$$-\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}), \quad (5.19)$$

soit en réinjectant :

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \right). \quad (5.20)$$

On utilise alors l'équation de Maxwell-Faraday (5.10) pour exprimer le rotationnel du champ électrique en fonction du champ magnétique. On obtient alors :

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \right), \quad (5.21)$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.} \quad (5.22)$$

Cette équation traduit la conservation de l'énergie électromagnétique. Elle fait intervenir la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2, \quad (5.23)$$

ainsi que le vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique, connu sous le nom de **vecteur de Poynting** :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}, \quad (5.24)$$

qui traduit la direction du transport de l'énergie électromagnétique. On notera en particulier que le vecteur de Poynting forme avec \mathbf{E} et \mathbf{B} un trièdre direct, et donc que l'énergie est transportée orthogonalement aux champs électrique et magnétique.

L'expression de la densité d'énergie électromagnétique fait intervenir un terme électrique et un terme magnétique. Ces termes correspondent aux énergies des champs électrique et magnétique telles qu'obtenues dans les cours d'électrostatique et de magnétostatique.

L'équation de conservation de l'énergie peut également s'écrire de façon globale en considérant un volume \mathcal{V} quelconque. Dans ce cas, la variation d'énergie électromagnétique dans ce domaine peut varier du fait du transport de l'énergie, ainsi que de l'interaction avec la matière, et cette variation s'obtient à partir de l'équation locale en l'intégrant sur le volume \mathcal{V} et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) (M, t) dV = - \oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{\Pi}(M, t) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathbf{j}(M, t) \cdot \mathbf{E}(M, t) dV,$$

(5.25)

où \mathcal{S} désigne la surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} .

5.3.4. Propagation du champ électromagnétique dans le vide illimité

Pour établir l'équation de propagation du champ électrique, on prend le rotationnel de l'Éq. (5.10) de Maxwell-Faraday, puis on utilise l'Éq. (5.11) de Maxwell-Ampère pour exprimer le rotationnel du champ magnétique :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = - \frac{\partial (\nabla \wedge \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5.26)$$

On utilise alors la définition du laplacien pour exprimer le membre de gauche, puis l'Éq. (5.8) de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho - \Delta \mathbf{E}. \quad (5.27)$$

On obtient alors finalement :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (5.28)$$

ou encore :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (5.29)$$

On procède de la même manière pour le champ magnétique, en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère, puis en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \wedge \mathbf{E})}{\partial t} = \mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{j}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (5.30)$$

On utilise la définition (5.27) du laplacien, associée à l'Éq. (5.9) de Maxwell-Thomson pour finalement obtenir :

$$\Delta \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{j}). \quad (5.31)$$

Analysons les équations obtenues tout d'abord en l'absence de sources : $\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les champs électrique et magnétique vérifient une équation d'onde de la forme (par exemple pour le champ électrique) :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Il s'agit de l'équation **d'ondes classiques**, ou encore équation de **D'Alembert**. Il s'agit d'une équation d'onde traduisant **la propagation du champ électromagnétique à la célérité**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad (5.33)$$

qui est, par conséquent, la célérité de la lumière dans le vide. Le membre de gauche dans l'Éq. (5.32) fait intervenir un opérateur différentiel appelé le **D'Alembertien** et noté :

$$\square = \Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (5.34)$$

de sorte que les équations de propagation des champs électrique et magnétique se réécrivent :

$$\square \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (5.35)$$

et

$$\square \mathbf{B} = -\mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{j}), \quad (5.36)$$

et se ramènent à l'équation :

$$\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (5.37)$$

dans le vide en l'absence de charges et de courants. Les Éq. (5.35) et (5.36) traduisent le fait que les champs électrique et magnétique se propagent à la célérité c dans le vide (membre de gauche), et peuvent être créés par les charges et les courants (membres de droite assimilés à des termes de sources).

5.3.5. Relations de passage du champ électromagnétique (HP)

Les équations de Maxwell supposent que les champs électrique et magnétique sont continus dans l'espace vide de charges et de courants, ainsi que dans les distributions volumiques. Par contre, comme en électrostatique et en magnétostatique, le champ électromagnétique est discontinu à la traversée de distributions surfaciques et linéiques, et n'est donc pas défini sur ces distributions. On peut établir, comme en électrostatique et en magnétostatique, les **relations de passage** à la traversée d'une distribution surfacique entre deux milieux 1 et 2 où règne une densité surfacique de charges σ et de courants \mathbf{j}_s . On notera $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à la distribution surfacique dirigé de 1 vers 2.

Composante normale du champ électrique

La relation de passage sur la composante normale du champ électrique s'obtient à partir de l'Éq. (5.8) de Maxwell-Gauss. Cette dernière étant inchangée par rapport à l'électrostatique, il en est de même de la relation de passage. Ainsi, la **composante normale du champ électrique est discontinue**, et cette discontinuité s'écrit :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{n},2}(M, t) - \mathbf{E}_{\mathbf{n},1}(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M, t), \quad (5.38)$$

où l'indice \mathbf{n} désigne la composante normale à la distribution surfacique, c'est-à-dire celle colinéaire à $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Composante tangentielle du champ électrique

Pour établir la relation de passage sur la composante tangentielle du champ électrique, on considère 4 points M_1 et N_1 et M_2 et N_2 , proches d'un point M de la surface, tels que $\mathbf{M}_1\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_2\mathbf{N}_2 = d\mathbf{r}$ est tangent à la nappe, tels que M_1 et N_1 sont du même côté de la nappe, et M_2, N_2 du même côté de la nappe, mais pas dans le même demi-espace que M_1 et N_1 . On calcule alors la circulation du champ électrique sur le contour $M_1N_1N_2M_2$ orienté, noté \mathcal{C} , qui s'écrit en utilisant le théorème de Stokes puis l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \oint_{M' \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_{M' \in \mathcal{S}} (\nabla \wedge \mathbf{E})(M', t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \iint_{M' \in \mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(M', t) \cdot d\mathbf{S} \quad , \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{M' \in \mathcal{S}} \mathbf{B}(M', t) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (5.39)$$

où \mathcal{S} désigne la surface délimitée par le contour \mathcal{C} . On a donc obtenu que la circulation du champ électrique était l'opposée de la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par ce contour. On verra par la suite que le champ magnétique est discontinu à la traversée de la distribution surfacique, mais cette discontinuité est bornée : le champ magnétique reste fini. Ainsi, si on fait tendre l'épaisseur du contour vers 0, c'est-à-dire M_1 (resp. N_1) vers M_2 (resp. N_2), le flux du champ magnétique s'annule et il en est de même pour la circulation du champ électrique, soit :

$$\oint_{M' \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (5.40)$$

Par ailleurs, cette circulation peut s'exprimer en décomposant l'intégrale sur chacun des quatre segments du contour :

$$\begin{aligned} \oint_{M' \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{M' \in [M_1N_1]} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{M' \in [N_1N_2]} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &\quad + \int_{M' \in [N_2M_2]} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{M' \in [M_2M_1]} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dans l'hypothèse où l'épaisseur du contour tend vers 0, les intégrales sur $[M_1M_2]$ et $[N_1N_2]$ tendent vers 0 également, et la circulation se réécrit simplement, en se contenant d'un développement limité à l'ordre 1 :

$$\oint_{M' \in \mathcal{C}} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{E}(M_1, t) \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{E}(M_2, t) \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.42)$$

Cette circulation étant nulle d'après l'Éq (5.40), on obtient donc que la **composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de la distribution surfacique**, ou encore :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{t},2}(M, t) - \mathbf{E}_{\mathbf{t},1}(M, t) = \mathbf{0}, \quad (5.43)$$

où l'indice \mathbf{t} désigne la composante tangentielle à la distribution surfacique, c'est-à-dire celle dans le plan orthogonal à $\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Composante normale du champ magnétique

La relation de passage sur la composante normale du champ magnétique s'obtient à partir de l'Éq. (5.9) de Maxwell-Thomson. Cette dernière étant inchangée par rapport à la magnétostatique, il en est de même de la relation de passage. Ainsi, la **composante normale du champ magnétique est continue**, soit :

$$\boxed{B_{\mathbf{n},2}(M, t) - B_{\mathbf{n},1}(M, t) = 0.} \quad (5.44)$$

Composante tangentielle du champ magnétique

Pour établir la relation de passage pour la composante tangentielle du le champ magnétique, on considère le même contour \mathcal{C} pour le calcul de la composante tangentielle du champ électrique. La circulation du champ magnétique sur ce contour s'écrit, en utilisant le théorème de Stokes puis l'Éq. (5.11) de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \oint_{M' \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M', t) \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{M' \in \mathcal{S}} (\nabla \wedge \mathbf{B})(M', t) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \iint_{M' \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M', t) \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{M' \in \mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M', t) \cdot d\mathbf{S} . \\ &= \mu_0 \iint_{M' \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M', t) \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{M' \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M', t) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Le premier terme correspond à l'intensité enlacée par le contour, le second à la variation du flux du champ électrique à travers la surface \mathcal{S} délimitée par le contour \mathcal{C} . Dans l'hypothèse où l'épaisseur du contour tend vers 0, ce second terme s'annule et on obtient finalement que la circulation du champ magnétique est égale à μ_0 multiplié par l'intensité enlacée par le contour. Cette situation est donc analogue à celle rencontrée en magnétostatique, la relation de passage sera donc inchangée. Ainsi, on obtient que la **composante tangentielle du champ magnétique est discontinue à la traversée d'une distribution surfacique**, avec une discontinuité donnée par :

$$\boxed{B_{\mathbf{t},2}(M, t) - B_{\mathbf{t},1}(M, t) = \mu_0 \mathbf{j}_s(M, t) \wedge \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}(M, t).} \quad (5.46)$$

5.4. Potentiels (HP)

5.4.1. Définition

D'après l'équation de Maxwell-Thomson (Éq. (5.9)), le champ magnétique est à divergence nulle, de sorte qu'il **dérive d'un potentiel vecteur** :

$$\boxed{\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t),} \quad (5.47)$$

où $\mathbf{A}(M, t)$ désigne le potentiel vecteur, qui est un champ vectoriel. On rappelle que le potentiel vecteur est **défini à un gradient près**.

⌋ Cette propriété, qui était déjà vraie en magnétostatique, reste correcte en électromagnétisme.

En utilisant l'équation précédente, ainsi que l'équation de Maxwell-Faraday (Éq. (5.10)), on obtient que le champ électrique vérifie :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E}(M, t) &= -\frac{\partial (\nabla \wedge \mathbf{A})}{\partial t}(M, t) \\ \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Autrement dit, le champ entre parenthèses est de rotationnel nul, et **dérive donc d'un potentiel scalaire** $V(M, t)$ **défini à une fonction du temps près**, soit finalement pour le champ électrique :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t). \quad (5.49)$$

En particulier, on remarque que le champ électrique **ne dérive pas d'un potentiel scalaire** dans le cas général. Par conséquent, le potentiel scalaire cesse d'être nommé potentiel électrostatique.

Par contre, on notera que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire si les sources sont indépendantes du temps, et en particulier en électrostatique, avec V qui coïncide avec le potentiel électrostatique.

5.4.2. Transformation de jauge

Les champs électrique et magnétique sont des quantités physiques mesurables, et leur expression doit être indépendante du choix de potentiels (V, \mathbf{A}) . Par ailleurs, les Éq. (5.47) et (5.49) montrent que les potentiels ne sont définis que par leurs dérivées, ce qui laisse a priori une liberté dans le choix de ces potentiels. Ces potentiels ne sont donc pas des quantités physiques mesurables.

On considère qu'on a un couple (V, \mathbf{A}) de potentiels qui vérifient les Éq. (5.47) et (5.49). On cherche à quelle condition le couple de potentiels (V', \mathbf{A}') convient également. En ce qui concerne le potentiel vecteur, si \mathbf{A} et \mathbf{A}' conviennent tous deux alors :

$$\mathbf{B}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(M, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}'(M, t) \iff \nabla \wedge (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (5.50)$$

L'équation précédente indique alors que la quantité entre parenthèses est de rotationnel nul, ou encore qu'elle dérive d'un potentiel scalaire. Il existe donc un champ scalaire $f(M, t)$ de sorte que :

$$\mathbf{A}'(M, t) = \mathbf{A}(M, t) + \nabla f(M, t). \quad (5.51)$$

En ce qui concerne le potentiel scalaire, on utilise l'expression du champ électrique :

$$\mathbf{E}(M, t) = -\nabla V(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(M, t) = -\nabla V'(M, t) - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}(M, t). \quad (5.52)$$

En utilisant la liberté sur le choix du potentiel vecteur donnée par l'Éq. (5.51), on obtient :

$$-\nabla V(M, t) = -\nabla V'(M, t) - \frac{\partial(\nabla f)}{\partial t}(M, t) \iff \nabla \left(V' - V + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \quad (5.53)$$

Cette dernière égalité indique alors qu'il existe une fonction du temps uniquement $g(t)$ telle que :

$$V'(M, t) = V(M, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(M, t) + g(t). \quad (5.54)$$

Les Éq. (5.51) et (5.54) définissent une **transformation de jauge**, c'est-à-dire une transformation du couple de potentiels (V, \mathbf{A}) en (V', \mathbf{A}') telle que le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) dérive à la fois de (V, \mathbf{A}) et (V', \mathbf{A}') . Cette transformation fait intervenir un champ scalaire $f(M, t)$, ainsi qu'une fonction du temps $g(t)$, tous deux quelconques.

5.4.3. Condition de jauge

Il existe donc une latitude dans le choix des potentiels. Pour restreindre le nombre de couples (V, \mathbf{A}) , on impose le plus souvent une **condition de jauge**, c'est-à-dire une condition supplémentaire vérifiée par les potentiels. Il en existe plusieurs rencontrées couramment.

- On peut utiliser la **jauge de Coulomb**, donnée par la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M, t) = 0. \quad (5.55)$$

Cette condition restreint les transformations de jauge autorisées, car si \mathbf{A} et \mathbf{A}' conviennent, alors

$$\Delta f(M, t) = 0. \quad (5.56)$$

Le champ $f(M, t)$ est donc une fonction harmonique, solution de l'équation de Laplace. Si on impose par ailleurs que le potentiel vecteur s'annule à l'infini, alors les transformations de jauge doivent être telles que le gradient de $f(M, t)$ s'annule à l'infini. Il s'agit alors pour trouver le champ $f(M, t)$ de résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de Neumann. Il existe un théorème d'analyse qui indique que si une solution à ce problème existe, alors cette solution est définie à une constante additive près. Or, il existe une solution évidente qui est obtenue en prenant $f(M, t)$ indépendante de l'espace, et donc uniquement fonction du temps. Ainsi, on en conclut que dans cette jauge, **le potentiel vecteur $\mathbf{A}(M, t)$ est défini à une fonction du temps près $f(t)$** . D'après l'Éq. (5.54), **c'est également le cas du potentiel scalaire**. Ces deux fonctions du temps sont alors fixées le plus souvent en supposant les potentiels nuls à l'infini.

┆ Cette jauge est celle qu'on rencontre dans le cadre de la magnétostatique.

- On peut également imposer la **jauge de Lorenz**, donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) = 0. \quad (5.57)$$

Contrairement à la jauge de Coulomb, cette jauge est dite incomplète car elle ne détermine pas les potentiels de façon unique. Il reste encore une certaine liberté dans le choix du couple (V, \mathbf{A}) . Néanmoins, elle est souvent préférée à la jauge de Coulomb, car elle simplifie davantage les calculs.

┆ La jauge de Lorenz est équivalente à la jauge de Coulomb dans la limite de la magnétostatique, c'est-à-dire de distributions de courants permanentes.

5.4.4. Équations de propagation des potentiels

Par la suite, on se place dans la jauge de Lorenz. Pour établir l'équation vérifiée par le potentiel vecteur, on calcule le rotationnel de l'Éq. (5.47), puis on utilise l'Éq. (5.11) de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.58)$$

Le membre de gauche se réexprime en fonction du laplacien du potentiel vecteur :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (5.59)$$

Pour le membre de droite, on utilise l'Éq. (5.49) pour exprimer le champ électrique en fonction des potentiels :

$$\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \left[-\frac{\partial (\nabla V)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right]. \quad (5.60)$$

On obtient alors finalement :

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \left[-\frac{\partial (\nabla V)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] \\ \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= \mu_0 \mathbf{j} + \Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Dans la jauge de Lorenz, le membre de gauche s'annule, soit finalement :

$$\square \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (5.62)$$

en utilisant le fait que $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ et la définition de l'opérateur D'Alembertien. On remarque que le potentiel vecteur satisfait **une équation de D'Alembert**, avec un terme de source (second membre), qui provient des courants.

En magnétostatique, la dérivée temporelle s'annule, et on retrouve l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel vecteur.

Pour le potentiel scalaire, on utilise l'expression du champ électrique (5.49), puis on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Gauss (5.8) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.63)$$

On utilise alors la condition de jauge de Lorenz pour exprimer la divergence de \mathbf{A} en fonction de la dérivée temporelle de V et on trouve :

$$-\Delta V + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.64)$$

soit finalement :

$$\square V = \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.65)$$

Le potentiel scalaire vérifie donc aussi une **équation de D'Alembert dans la jauge de Lorenz**, avec un terme de source (second membre) qui provient des charges.

En électrostatique, la dérivée temporelle s'annule, et on retrouve l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel scalaire.

Plusieurs remarques importantes peuvent être faites à ce stade.

- ▶ Les équations vérifiées par les potentiels **sont découplées** : l'équation sur \mathbf{A} ne fait pas intervenir V et réciproquement.
- ▶ Les potentiels **se propagent à la vitesse** c dans des régions vides de charges et de courants, comme le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

On peut reprendre les calculs de cette section dans la jauge de Coulomb. Dans ce cas, les potentiels vérifient des équations différentes, qui s'écrivent :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla V)}{\partial t}, \quad (5.66)$$

et

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5.67)$$

Dans la jauge de Coulomb, le potentiel scalaire est alors obtenu par une équation de Poisson comme en électrostatique. Le potentiel vecteur dépend toujours des courants, mais un terme supplémentaire est ajouté par rapport à la jauge de Lorenz qui traduit le couplage entre le potentiel scalaire et le potentiel vecteur.

5.4.5. Potentiels retardés

Dans la jauge de Lorenz, on peut trouver une solution des Éq. (5.62) et (5.65), connue sous le nom de **potentiels retardés**. Pour cela, on considère que les sources (charges et courants) sont localisées dans un volume Σ . Dans ce cas, une solution des équations de D'Alembert pour les potentiels s'écrit :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\rho(P, t - \|\mathbf{PM}\|/c)}{\|\mathbf{PM}\|} dV, \quad (5.68)$$

et

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in \Sigma} \frac{\mathbf{j}(P, t - \|\mathbf{PM}\|/c)}{\|\mathbf{PM}\|} dV. \quad (5.69)$$

Attention, il s'agit d'une solution pour les potentiels, qui sont définis à une transformation de jauge près.

Les deux équations précédentes traduisent le fait que les potentiels au point M et à l'instant t sont obtenues à partir des sources de Σ à un instant antérieur qui dépend de la distance au point M : cela traduit **la propagation de l'information** de la distribution jusqu'au point M à **une célérité finie** qui est la vitesse c de la lumière dans le vide.

À partir de ces expressions des potentiels, on peut obtenir l'expression des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à partir des Éq. (5.47) et (5.49). Cependant, le calcul des potentiels par cette méthode est souvent ardu, et on préfère revenir aux équations de Maxwell.

A. Formulaire d'analyse vectorielle

A.1. Dérivées partielles

A.1.1. Définition

On définit un champ par une fonction de l'espace, qui prend comme argument le vecteur \mathbf{r} et renvoie une quantité :

- ▶ si cette quantité est un nombre, on parle de **champ scalaire** $f(\mathbf{r})$,
- ▶ si cette quantité est un vecteur, on parle de **champ vectoriel** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Pour un champ scalaire, on définit la dérivée partielle selon une variable comme la dérivée du champ par rapport à cette variable, les autres étant fixes. Par exemple, en coordonnées cartésiennes :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y,z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}. \quad (\text{A.1})$$

La barre verticale indique les variables fixées, et si aucune confusion n'est possible, on pourra l'omettre.

Cette définition se généralise aux champs vectoriels, à toute variable, à tout système de coordonnées, mais aussi aux ordres successifs de dérivation, par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h, y, z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{h}, \quad (\text{A.2})$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h, z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{h}. \quad (\text{A.3})$$

A.1.2. Propriétés

La dérivée partielle est une opération de dérivation, et en a donc toutes les propriétés, valable dans tout système de coordonnées.

- ▶ La dérivée partielle est une opération linéaire. Par exemple, pour deux champs scalaires $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ et deux constantes α et β , on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha f + \beta g)(x, y, z) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \beta \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z). \quad (\text{A.4})$$

- ▶ La dérivée partielle se comporte de la manière suivante pour le produit de deux champs scalaires $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg)(x, y, z) = f(x, y, z) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + g(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z). \quad (\text{A.5})$$

- La dérivée partielle se comporte de la manière suivante pour la composition d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ avec une fonction d'une variable $h(u)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h(f(x, y, z))) = \frac{dh}{du}(f(x, y, z)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z). \quad (\text{A.6})$$

A.1.3. Théorème de Schwarz

Pour un champ scalaire ou vectoriel suffisamment régulier (ce qui sera toujours le cas en physique), l'ordre des variables dans le calcul des dérivées partielles n'importe pas. Autrement dit, pour un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ et en coordonnées cartésiennes par exemple, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z). \quad (\text{A.7})$$

A.1.4. Différentielle d'une fonction

La notion de différentielle est une notion complexe et riche, qui intervient en mathématiques. Ici, on se contente d'une approche « à la physicienne ». Considérons un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ et intéressons-nous à la variation infinitésimale de $f(\mathbf{r})$ quand \mathbf{r} varie de façon infinitésimale d'une quantité $d\mathbf{r}$. À partir de la définition (A.1) des dérivées partielles, et en généralisant la notion de développement limité au cas des fonctions de plusieurs variables, on obtient que la variation infinitésimale de $f(\mathbf{r})$, qu'on appelle **la différentielle de $f(\mathbf{r})$** , et qu'on note $df(\mathbf{r})$, s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz. \quad (\text{A.8})$$

La définition de la différentielle se généralise à tout système de coordonnées :

- en coordonnées cylindriques,

$$df(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z)dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z)d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z)dz, \quad (\text{A.9})$$

- en coordonnées sphériques,

$$df(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, \varphi)dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi)d\varphi. \quad (\text{A.10})$$

A.2. L'opérateur gradient (nabla)

A.2.1. Définition

Pour un champ scalaire $f(\mathbf{r})$, on définit son gradient $\nabla f(\mathbf{r})$, qui est un **champ de vecteurs**, par :

$$df(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.11})$$

où $df(\mathbf{r})$ est la différentielle de la fonction f au point \mathbf{r} définie précédemment.

L'expression du gradient dépend du système de coordonnées, et est obtenue aisément en utilisant la définition (A.11), les Éq. (A.8), (A.9) et (A.10) et l'expression du déplacement infinitésimal dans le système de coordonnées correspondant. Seule la connaissance du gradient en coordonnées cartésiennes est au programme, néanmoins il est recommandé de connaître le gradient dans tous les systèmes de coordonnées.

► En coordonnées cartésiennes :

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.12})$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ est la dérivée partielle de f par rapport à x , les variables y et z restant fixées (comme définie par l'Éq. (A.1)).

► En coordonnées cylindriques :

$$\nabla f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(r, \theta, z)\mathbf{e}_z. \quad (\text{A.13})$$

► En coordonnées sphériques :

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{A.14})$$

A.2.2. Propriétés

L'opérateur gradient se comporte comme un opérateur de dérivation et en a toutes les propriétés, en particulier les propriétés suivantes, qui découlent de celles des dérivées partielles.

► Le gradient est un opérateur linéaire. Pour deux champs scalaires $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ et deux constantes α et β , on a :

$$\nabla(\alpha f + \beta g)(\mathbf{r}) = \alpha \nabla f(\mathbf{r}) + \beta \nabla g(\mathbf{r}). \quad (\text{A.15})$$

► Le gradient se comporte de la manière suivante pour le produit de deux champs scalaires $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$:

$$\nabla(fg)(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\nabla g(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})\nabla f(\mathbf{r}). \quad (\text{A.16})$$

► Le gradient se comporte de la manière suivante pour la composition d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ avec une fonction d'une variable $h(u)$:

$$\nabla(h(f(\mathbf{r}))) = \frac{dh}{du}(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r}). \quad (\text{A.17})$$

A.3. L'opérateur divergence

A.3.1. Définition

Pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, sa divergence est définie par le théorème de **Green-Ostrogradski**. Considérons une surface fermée \mathcal{S} orientée vers l'extérieur conventionnellement. Alors le flux de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ à travers cette surface s'écrit :

$$\oint_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbf{r} \in \mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV, \quad (\text{A.18})$$

où $d\mathbf{S}$ est le vecteur normal à \mathcal{S} orienté vers l'extérieur de norme dS , et \mathcal{V} le volume délimité par \mathcal{S} . L'équation précédente fait intervenir le **champ scalaire** associé au champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, qu'on note $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (ou $\text{div}(\mathbf{A})$), et qui s'appelle la **divergence du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$** .

Son expression dépend aussi des coordonnées, et seule son expression en coordonnées cartésiennes est à connaître :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z), \quad (\text{A.19})$$

où A_x désigne la composante selon x du champ de vecteurs, c'est-à-dire que le champ de vecteurs s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + A_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + A_z(x, y, z)\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.20})$$

avec les composantes qui sont trois champs scalaires.

La notation $\nabla \cdot \mathbf{A}$ pour la divergence n'est pas choisie par hasard. En effet, si on définit de manière formelle un vecteur « nabla »

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z, \quad (\text{A.21})$$

alors, la divergence du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le produit scalaire du vecteur ∇ et du champ de vecteurs **uniquement en coordonnées cartésiennes**.

A.3.2. Propriétés

L'opérateur de divergence est un opérateur de dérivation, et en a donc toutes les propriétés, qu'on peut démontrer en utilisant les coordonnées cartésiennes.

- C'est un opérateur linéaire. Pour deux champs de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, et deux constantes α et β , on a :

$$\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})(\mathbf{r}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.22})$$

- La divergence du produit d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ par un champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vaut :

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A})(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla f)(\mathbf{r}). \quad (\text{A.23})$$

A.4. L'opérateur rotationnel

Pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, son rotationnel est défini par le théorème de **Stokes**. Considérons un contour fermé \mathcal{C} orienté. Alors la circulation du champ de vecteurs sur ce contour s'écrit :

$$\oint_{\mathbf{r} \in \mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}} \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.24})$$

où \mathcal{S} est la surface définie par le contour, $d\boldsymbol{\ell}$ le vecteur tangent à \mathcal{C} de norme $d\ell$, et $d\mathbf{S}$ le vecteur normal à \mathcal{S} de norme dS , dont l'orientation est compatible avec celle du contour (donnée par la règle de la main droite). L'équation précédente fait intervenir le **champ de vecteurs** associé au champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, qu'on note $\nabla \wedge \mathbf{A}$ (ou **rot**(\mathbf{A})), et qui s'appelle le **rotationnel du champ de vecteurs** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Son expression dépend également des coordonnées, et seule son expression en coordonnées cartésiennes est à connaître :

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{A}(x, y, z) = & \left[\frac{\partial A_z}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial A_y}{\partial z}(x, y, z) \right] \mathbf{e}_x \\ & + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial A_z}{\partial x}(x, y, z) \right] \mathbf{e}_y \\ & + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(x, y, z) \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Là encore, la notation pour le rotationnel n'est pas anodine. En **coordonnées cartésiennes uniquement**, on peut retrouver l'expression du rotationnel d'un champ de vecteurs en écrivant le produit vectoriel du vecteur ∇ (donné par l'Éq. (A.21)) par le champ de vecteurs.

A.4.1. Propriétés

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel. Il a donc les propriétés énoncées ci-dessous, qu'on peut de nouveau démontrer en utilisant les coordonnées cartésiennes.

- C'est un opérateur linéaire. Pour deux champs de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, et deux constantes α et β , on a :

$$\nabla \wedge (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B})(\mathbf{r}) = \alpha \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \beta \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.26})$$

- Le rotationnel du produit d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ par un champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vaut :

$$\nabla \wedge (f \mathbf{A})(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) + (\nabla f)(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.27})$$

Les différents opérateurs vectoriels ont également des propriétés de composition particulières :

- Le rotationnel d'un gradient est nul. Pour tout champ scalaire $f(\mathbf{r})$, on a :

$$\nabla \wedge (\nabla f) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.28})$$

- La divergence d'un rotationnel est nulle. Pour tout champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, on a :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0. \quad (\text{A.29})$$

- La divergence d'un produit vectoriel s'exprime en fonction du rotationnel de chacun des champs de vecteurs :

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})(\mathbf{r}). \quad (\text{A.30})$$

A.5. L'opérateur laplacien

A.5.1. Laplacien d'un champ scalaire

Le laplacien d'un champ scalaire $f(\mathbf{r})$ est un **champ scalaire** défini par :

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla f)(\mathbf{r}). \quad (\text{A.31})$$

Autrement dit, c'est la divergence du gradient d'un champ scalaire.

Parfois, le laplacien est noté ∇^2 .

Son expression dépend du système de coordonnées, seule son expression en coordonnées cartésiennes est à connaître :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z). \quad (\text{A.32})$$

Contrairement aux opérateurs introduits précédemment, le laplacien est un **opérateur différentiel d'ordre 2**.

Le laplacien reste un opérateur linéaire. Pour deux champs scalaires $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ et deux constantes α et β , on a :

$$\Delta (\alpha f + \beta g) (\mathbf{r}) = \alpha \Delta f(\mathbf{r}) + \beta \Delta g(\mathbf{r}). \quad (\text{A.33})$$

A.5.2. Laplacien d'un champ vectoriel

En **coordonnées cartésiennes**, le laplacien d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est calculé à partir du laplacien des champs scalaires de ses composantes par la relation :

$$\Delta \mathbf{A}(x, y, z) = \Delta A_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + \Delta A_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + \Delta A_z(x, y, z) \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.34})$$

À partir de cette relation, on peut montrer que le laplacien d'un champ de vecteur peut être obtenu à partir des opérateurs vectoriels définis précédemment :

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) (\mathbf{r}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) (\mathbf{r}). \quad (\text{A.35})$$

Contrairement à l'Éq. (A.34), l'Éq. (A.35) est valable dans tout système de coordonnées.

A.6. Dérivée d'une fonction selon un vecteur

Cette notion est très importante, et se rencontre en mécanique des fluides (dérivée convective), mais aussi dans le cas du dipôle électrostatique.

A.6.1. Cas d'un champ scalaire

Pour un champ scalaire $f(\mathbf{r})$, on définit la dérivée selon le champ de vecteurs $\mathbf{b}(\mathbf{r})$, qui est un **champ scalaire**, par son expression en coordonnées cartésiennes :

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) f(\mathbf{r}) = b_x(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + b_y(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + b_z(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z). \quad (\text{A.36})$$

Les parenthèses dans le membre de gauche sont très importantes, elles permettent de différencier la dérivée selon un vecteur $(\mathbf{b} \cdot \nabla) f$ avec la projection du gradient selon un vecteur $\mathbf{b} \cdot (\nabla f)$.

La notation n'est pas choisie par hasard. En effet, on peut voir l'action de cet opérateur comme le fait de prendre en premier lieu le produit scalaire du vecteur $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ par le vecteur ∇ , puis en second lieu de faire agir cet opérateur sur le champ scalaire $f(\mathbf{r})$.

Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées seront fournies si besoin.

A.6.2. Cas d'un champ vectoriel

Pour un champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, on définit la dérivée selon le champ de vecteurs $\mathbf{b}(\mathbf{r})$, qui est un **champ vectoriel**, par son expression en coordonnées cartésiennes :

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = b_x(x, y, z) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}(x, y, z) + b_y(x, y, z) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}(x, y, z) + b_z(x, y, z) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}(x, y, z). \quad (\text{A.37})$$

Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées seront fournies si besoin.

A.6.3. Propriétés

La dérivée selon un vecteur est un opérateur différentiel, qui a donc plusieurs propriétés particulières. Ces propriétés peuvent être démontrées là encore à partir des expressions en coordonnées cartésiennes.

- C'est un opérateur linéaire. Pour deux champs (scalaires ou vectoriels) $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ et deux constantes α et β , on a :

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) (\alpha f + \beta g) (\mathbf{r}) = \alpha (\mathbf{b} \cdot \nabla) f(\mathbf{r}) + \beta (\mathbf{b} \cdot \nabla) g(\mathbf{r}). \quad (\text{A.38})$$

- Pour un champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, sa dérivée selon lui-même se simplifie :

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A}^2) (\mathbf{r}) + (\nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.39})$$

- Le gradient du produit scalaire de deux champs vectoriels $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ fait intervenir la dérivée selon un vecteur :

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{r}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})) + \mathbf{B}(\mathbf{r}) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})). \quad (\text{A.40})$$