HMEF104 — Electromagnétisme

TD3 - Magnétostatique

Le niveau des exercices est indiqué par les étoiles.

1 Champ magnétique créé par un câble coaxial (**)

On considère un câble coaxial constitué d'un conducteur cylindrique plein de rayon R_1, entouré par un conducteur occupant le volume compris entre deux cylindres de même axe et de rayons R_2 et R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Un courant I circule dans le conducteur intérieur, et un courant égal et opposé circule dans le conducteur extérieur.

1. Étudier les invariances du champ magnétique. On négligera les effets de bords.

Solution: La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe commun des deux conducteurs, qu'on note (Oz) par la suite. Ainsi, si on se place en coordonnées cylindriques, le champ magnétique ne dépend pas de la variable θ. De plus, si on néglige les effets de bords, le champ magnétique ne dépend pas de la variable verticale z, soit finalement :

$$\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{B}(r). \tag{1}$$

2. Étudier les symétries de la distribution de courants. En déduire la direction du champ magnétique.

Solution: On se place en un point M, et on étudie les symétries de la distribution de courants. Le plan passant par M et contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution, ainsi le champ magnétique est orthogonal à ce plan, soit :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r)\boldsymbol{e_\theta}, \tag{2}$$

en coordonnées cylindriques.

3. On suppose que le courant est réparti uniformément dans les conducteurs. Donner les densités volumiques de courants $\boldsymbol{j_{\text{int}}}$ et $\boldsymbol{j_{\text{ext}}}$ dans les conducteurs intérieur et extérieur respectivement.

Solution: Dans le conducteur intérieur, le courant I est dirigé verticalement vers le haut. Ainsi, on a $\boldsymbol{j_{\text{int}}} = j_{\text{int}}\boldsymbol{e_z}$. De plus, le flux de $\boldsymbol{j_{\text{int}}}$ à travers toute surface transverse est égal à I. $\boldsymbol{j_{\text{int}}}$ étant uniforme, on en déduit que :

$$\boldsymbol{j_{\text{int}}} = \frac{I}{\pi R_1^2}\boldsymbol{e_z}. \tag{3}$$

Dans le conducteur extérieur, le courant est dirigé vers le bas. Par ailleurs, sa section transverse a pour aire $\pi R_3^2 - \pi R_2^2$, soit :

$$\boldsymbol{j_{\text{ext}}} = -\frac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\boldsymbol{e_z}. \tag{4}$$

4. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.

Solution: On applique le théorème d'Ampère en calculant la circulation du champ magnétique sur un cercle $\mathscr{C}$ de rayon r et de même axe que les conducteurs. On l'oriente de sorte que le courant circulant dans le conducteur intérieur soit compté positivement. Le théorème d'Ampère s'écrit alors :

$$\oint_{M\in\mathscr{C}} \boldsymbol{B}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{M\in\mathscr{D}} \boldsymbol{j}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

où $\mathscr{D}$ désigne le disque de rayon r. Le membre de gauche se calcule aisément :

$$\oint_{M\in\mathscr{C}} \boldsymbol{B}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r)\boldsymbol{e_\theta}\cdot r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e_\theta} = 2\pi r B(r).$$

Pour le calcul du second membre, il faut alors distinguer 4 cas différents, selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, et $r > R_3$:

$$\iint_{M\in\mathscr{D}} \boldsymbol{j}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{M\in\mathscr{D}} \boldsymbol{j}(M)\cdot \boldsymbol{e_z}\mathrm{d}S = \begin{cases} \pi r^2 \left\|\boldsymbol{j_{\mathrm{int}}}\right\| & \text{si } r < R_1 \\ I & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ I - \pi\left(r^2 - R_2^2\right)\left\|\boldsymbol{j_{\mathrm{ext}}}\right\| & \text{si } R_2 < r < R_3 \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}.$$

On obtient alors le champ magnétique dans toutes les régions de l'espace :

$$\boldsymbol{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } R_2 < r < R_3 \\ \boldsymbol{0} & \text{si } r > R_3 \end{cases}. \tag{5}$$

2 Champ magnétique créé par une nappe de courants (*)

On considère une nappe de courants occupant le plan d'équation $z = 0$. On suppose que ce plan est parcouru par une densité surfacique de courants $\boldsymbol{j_{\mathrm{s}}} = j_{\mathrm{s}}\boldsymbol{e_y}$, où j_{s} est une constante.

1. Étudier les symétries et invariances de la distribution de courants.

Solution: La distribution de courants est invariante par translation selon les coordonnées x et y. Ainsi, en coordonnées cartésiennes :

$$\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{B}(z). \tag{6}$$

De plus, le plan $(M, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z})$ est plan de symétrie de la distribution de courants, ainsi le champ magnétique au point M est orthogonal à ce plan, soit :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(z)\boldsymbol{e_x}. \tag{7}$$

De plus, la nappe de courants est plan de symétrie de la distribution de courants, et donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Ainsi $\boldsymbol{B}(-z) = -\boldsymbol{B}(z)$, ou encore $B(z)$ est une fonction impaire de z.

2. Calculer le champ magnétique partout dans l'espace.

Solution: On va appliquer le théorème d'Ampère en considérant le rectangle fermé orienté délimité par les points $M(x, y, z)$, $M'(x+h, y, z)$, $M''(x+h, y, -z)$ et $M'''(x, y, -z)$, avec $h > 0$. La circulation du champ magnétique sur ce contour s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \int_{P\in[MM']} \boldsymbol{B}(P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_{P\in[M'M'']} \boldsymbol{B}(P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_{P\in[M''M''']} \boldsymbol{B}(P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_{P\in[M'''M]} \boldsymbol{B}(P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= B(z)h + 0 - B(-z)h + 0 \\ &= 2B(z)h\end{aligned},$$

la dernière égalité étant obtenue par imparité de $B(z)$. De plus le courant enlacé vaut $I_\mathrm{e} = j_\mathrm{s} h$, d'où l'on tire par le théorème d'Ampère :

$$\boldsymbol{B}(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_\mathrm{s}}{2}\boldsymbol{e_x} & \text{si } z > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 j_\mathrm{s}}{2}\boldsymbol{e_x} & \text{si } z < 0 \end{cases}. \tag{8}$$

3. Exprimer le champ magnétique au point M de façon intrinsèque en fonction de $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$ et le vecteur $\boldsymbol{n}$ unitaire normal à la nappe de courants et pointant dans le même demi-espace que M. Retrouver la relation de passage pour le champ magnétique de part et d'autre de la nappe de courants.

Solution: Si $z > 0$, alors $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_z}$. De plus $\boldsymbol{e_x} = \boldsymbol{e_y} \wedge \boldsymbol{e_z}$, d'où l'on tire :

$$\boldsymbol{B}(z > 0) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{n}.$$

Si $z < 0$, alors $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e_z}$, d'où l'on tire :

$$\boldsymbol{B}(z < 0) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{n}.$$

Ainsi, dans tous les cas on a :

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{n}. \tag{9}$$

On considère maintenant deux points M_- et M_+ de part et d'autre de la nappe de courants avec $z_- < 0$ et $z_+ > 0$. Alors la différence entre les deux champs magnétiques s'écrit :

$$\boldsymbol{B}(M_+) - \boldsymbol{B}(M_-) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge [\boldsymbol{n}(M_+) - \boldsymbol{n}(M_-)] = \mu_0 \boldsymbol{j_\mathrm{s}} \wedge \boldsymbol{e_z} \tag{10}$$

(car $\boldsymbol{n}(M_\pm) = \pm\boldsymbol{e_z}$), qui est bien la relation de passage attendue.

3 Champ créé par un solénoïde (**)

On considère un solénoïde constitué d'un enroulement de N spires parcourues par un même courant I. On suppose le solénoïde de longueur $L \gg R$. On négligera les effets de bords.

1. Montrer que le solénoïde est équivalent à une distribution surfacique de courants dont on précisera la densité $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$.

Solution: On peut assimiler le solénoïde à une distribution surfacique de courants cylindrique de rayon R et de longueur L, dont la densité surfacique est de la forme $\boldsymbol{j_\mathrm{s}} = j_\mathrm{s}\boldsymbol{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques. Si on considère un élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ porté par l'axe du cylindre (selon $\boldsymbol{e_z}$), alors le courant qui le traverse est :

$$\mathrm{d}I = \frac{N\mathrm{d}\ell}{L} I = j_\mathrm{s}\mathrm{d}\ell,$$

la deuxième égalité étant la définition de j_s. On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{j}_\mathbf{s} = \frac{NI}{L}\boldsymbol{e_\theta}. \tag{11}$$

2. Étudier les symétries et les invariances du champ magnétique.

Solution: La distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe du solénoïde, de sorte que le champ magnétique ne dépend pas de θ en coordonnées cylindriques. De plus, si on néglige les effets de bords, alors :

$$\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{B}(r). \tag{12}$$

Le plan contenant le point M et l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, et contient donc le champ magnétique au point M, soit :

$$\boldsymbol{B}(M) = B_r(r)\boldsymbol{e_r} + B_z(r)\boldsymbol{e_z}. \tag{13}$$

3. En utilisant la conservation du flux du champ magnétique sur une surface fermée bien choisie, montrer que le champ magnétique dans tout l'espace est de la forme :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r)\boldsymbol{e_z}.$$

Solution: On considère deux cylindres élémentaires de hauteur dz et de rayons r et $r + \mathrm{d}r$, et on choisit comme surface fermée celle délimitée par ces deux cylindres. Le flux du champ magnétique à travers cette surface est nul par conservation du flux du champ magnétique. Par ailleurs en décomposant sur les différentes surfaces, ce flux s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\Phi = &\int_r^{r+\mathrm{d}r} 2\pi r' B_z(r', z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}r' - \int_r^{r+\mathrm{d}r} 2\pi r' B_z(r', z)\mathrm{d}r' \\ &+ \int_z^{z+\mathrm{d}z} 2\pi(r+\mathrm{d}r)B_r(r+\mathrm{d}r, z')\mathrm{d}z' - \int_z^{z+\mathrm{d}z} 2\pi r B_r(r, z')\mathrm{d}z'\end{aligned},$$

les deux premières intégrales correspond aux surfaces orthogonales à $\boldsymbol{e_z}$ et les deux autres aux surfaces latérales orthogonales à $\boldsymbol{e_r}$. Ce flux se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\Phi &= \int_r^{r+\mathrm{d}r} 2\pi r' \left[B_z(r', z+\mathrm{d}z) - B_z(r', z)\right]\mathrm{d}r' + \int_z^{z+\mathrm{d}z} 2\pi \left[(r+\mathrm{d}r)B_r(r+\mathrm{d}r, z') - rB_r(r, z')\right]\mathrm{d}z' \\ &= \int_r^{r+\mathrm{d}r} 2\pi r' \frac{\partial B_z}{\partial z}(r', z)\mathrm{d}z\mathrm{d}r' + \int_z^{z+\mathrm{d}z} 2\pi \frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right)(r, z')\mathrm{d}r\mathrm{d}z'\end{aligned}.$$

Les intégrales étant infinitésimales, on peut les calculer aisément :

$$\mathrm{d}^2\Phi = 2\pi r \frac{\partial B_z}{\partial z}(r, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}r + 2\pi \frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right)(r, z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

ce qui nous donne finalement :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right)(r, z) + \frac{\partial B_z}{\partial z}(r, z) = 0.$$

Or ici, B_r et B_z ne dépendent que de r, ce qui permet de simplifier l'équation sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_r) = 0.$$

Cette équation s'intègre facilement en :

$$B_r(r) = \frac{A}{r}, \tag{14}$$

où A est une constante. Le champ magnétique ne pouvant diverger sur l'axe du solénoïde, cela impose que $A = 0$, et donc que $B_r = 0$ dans tout l'espace.

4. En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour bien choisi, montrer que le champ magnétique est constant à la fois à l'intérieur du solénoïde et à l'extérieur de celui-ci. Peut-il prendre la même valeur partout dans l'espace ?

Solution: On considère un contour en forme de parallélogramme élémentaire généré par les vecteurs $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_z}$, dont M est une des extrémités, et n'enlaçant pas le solénoïde (soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du solénoïde). D'après le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique sur ce contour est nulle. Par ailleurs, on peut la calculer en décomposant selon chacun des quatre côtés :

$$\mathrm{d}^2\mathcal{C} = \int_z^{z+\mathrm{d}z} B_z(r+\mathrm{d}r, z')\mathrm{d}z' - \int_r^{r+\mathrm{d}r} B_r(r', z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}r' - \int_z^{z+\mathrm{d}z} B_z(r, z')\mathrm{d}z' + \int_r^{r+\mathrm{d}r} B_r(r', z)\mathrm{d}r'.$$

Le champ magnétique étant indépendant de la variable z, B_r étant nul, et B_z étant noté tout simplement B, on obtient :

$$\mathrm{d}^2C = B(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}z - B(r)\mathrm{d}z = 0,$$

d'où l'on tire par un développement limité à l'ordre 1 en dr :

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = 0. \tag{15}$$

Ainsi le champ magnétique est bien constant à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde. Par contre, ces deux constantes sont a priori différentes car le champ magnétique est discontinu à la traversée de la nappe de courants qui sépare l'intérieur de l'extérieur du solénoïde.

5. En supposant le champ magnétique nul à l'infini, préciser sa valeur à l'extérieur du solénoïde.

Solution: Le champ magnétique est constant à l'extérieur du solénoïde. Mais pour que le champ magnétique soit nul à l'infini, cela impose que cette constante soit nulle, et donc que le champ magnétique soit nul partout à l'extérieur du solénoïde.

6. En appliquant de nouveau le théorème d'Ampère sur un contour bien choisi, calculer le champ magnétique en tout point à l'intérieur du solénoïde.

Solution: On applique cette fois-ci le théorème d'Ampère sur un parallélogramme qui chevauche le solénoïde délimité par les points $M(r,z)$, $M'(r,z+h)$, $M''(r',z+h)$ et $M'''(r',z)$, où $h > 0$, $r < R$ et $r' > R$. La circulation du champ magnétique sur ce contour vaut $\mathcal{C} = Bh$, où B est la valeur (constante) du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde (seul le premier segment contribue à la circulation, les autres donnant une contribution nulle car le champ y est soit nul, soit orthogonal au contour). Par ailleurs, d'après le théorème d'Ampère, on a :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_\mathrm{e} = \mu_0 \left\|\boldsymbol{j_\mathrm{s}}\right\| h = \mu_0 \frac{N}{L} I h.$$

On obtient donc finalement le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde :

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{L}\boldsymbol{e_z}. \tag{16}$$

7. Donner l'allure des lignes de champ. Que deviennent-elles si les effets de bords ne sont pas négligés ?

Solution: Dans le cas où on peut négliger les effets de bords, les lignes de champ sont des droites parallèles à l'axe du solénoïde à l'intérieur de celui-ci. Dans le cas où on ne peut pas négliger les effets de bords, les lignes de champ se referment à l'extérieur du solénoïde, le solénoïde peut donc être vu comme un dipôle magnétique dont le moment magnétique est porté selon $\boldsymbol{e_z}$.

8. Donner le moment dipolaire magnétique $\boldsymbol{m}$ de cette distribution de courants.

Solution: On peut calculer le moment dipolaire magnétique du solénoïde en utilisant la formule du cours :

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\oiint_{P\in\Sigma} \boldsymbol{OP} \wedge \boldsymbol{j_s}(P)\mathrm{d}S,$$

où on prend ici pour le point O le centre du solénoïde Σ. Pour un point P du solénoïde, on a $\boldsymbol{OP} = R\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$, soit :

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\theta\,[R\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}] \wedge j_\mathrm{s}\boldsymbol{e_\theta} = \frac{j_\mathrm{s}}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\theta\,[R\boldsymbol{e_z} - z\boldsymbol{e_r}]\,.$$

L'intégration sur θ annule la composante de l'intégrale selon $\boldsymbol{e_r}$, soit finalement :

$$\boldsymbol{m} = \frac{NIR^2}{2L}\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e_z} = \pi NIR^2\boldsymbol{e_z}. \tag{17}$$

En réalité, on aurait pu trouver ce résultat beaucoup plus facilement en considérant le solénoïde comme un ensemble de N spires. Chaque spire possède un moment magnétique $\boldsymbol{m_{\mathrm{sp}}} = I\boldsymbol{S} = I\pi R^2\boldsymbol{e_z}$, et on doit tous les sommer pour obtenir le moment dipolaire du solénoïde.

4 Champ magnétique à l'intérieur d'une cavité cylindrique (*)

On considère un ensemble de $N \gg 1$ fils uniformément répartis, tous parcourus par un courant d'intensité I et réunis sous la forme d'un cylindre d'axe (Oz) infiniment long de rayon R.

1. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.

Solution: Nous allons utiliser le théorème d'Ampère, et pour cela nous devons d'abord étudier les symétries et invariances de la distribution de courants. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon ce même axe. Ainsi, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique ne dépend que de la variable r. Par ailleurs, pour un point M quelconque, le plan contenant le point M et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, soit :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r)\boldsymbol{e_\theta}.$$

On calcule la circulation du champ magnétique sur le cercle $\mathscr{C}$ d'axe (Oz) et de rayon r :

$$\mathcal{C} = \oint_{M\in\mathscr{C}} \boldsymbol{B}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B(r).$$

Le théorème d'Ampère indique alors que $\mathcal{C} = \mu_0 I_e$, où l'intensité enlacée vaut :

$$I_e = \begin{cases} NI\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} & \text{si } r < R \\ NI & \text{si } r > R \end{cases}.$$

Cela donne finalement pour le champ magnétique :

$$\boldsymbol{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NIr}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } r < R \\ \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } r > R \end{cases}. \quad (18)$$

2. Exprimer le champ à l'intérieur du cylindre de façon intrinsèque (indépendamment de tout système de coordonnées) en fonction de μ_0, N, I, $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{e_z}$.

Solution: Le champ magnétique à l'intérieur du cylindre s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{B}(r) = \frac{\mu_0 NIr}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_\theta}.$$

Il faut exprimer le vecteur $\boldsymbol{e_\theta}$ de façon intrinsèque en fonction de $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{e_z}$. Pour cela on exprime le vecteur position :

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z},$$

ainsi :

$$\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{e_z} = -r\boldsymbol{e_\theta}.$$

Cela permet finalement d'obtenir l'expression intrinsèque du champ magnétique à l'intérieur du cylindre :

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_z} \wedge \boldsymbol{OM}. \quad (19)$$

3. On retire à ce cylindre quelques fils : le cylindre présente alors une cavité cylindrique décentrée d'axe $(O'z)$ parallèle à (Oz). Calculer le champ magnétique dans la cavité. Commenter.

Solution: Nous allons utiliser le principe de superposition pour le champ magnétique. On peut voir la cavité décentrée vide comme la superposition de deux courants opposés $+I$ et $-I$. Ainsi le champ magnétique en un point M intérieur à la cavité s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(M) &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_z} \wedge \boldsymbol{OM} + \frac{\mu_0 N(-I)}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_z} \wedge \boldsymbol{O'M} \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_z} \wedge (\boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O'M}) \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi R^2}\boldsymbol{e_z} \wedge \boldsymbol{OO'} \end{aligned}, \quad (20)$$

qui est donc constant dans tout le volume de la cavité.

5 Champ magnétique créé par un tore à section carrée (*)

On considère un tore de rayon moyen b, de section carrée de côté a, et sur lequel sont enroulés N spires parcourues par un même courant I. On notera O le centre du tore, (Oz) son axe et on supposera le courant compté positivement selon le vecteur $\boldsymbol{e_\theta}$ des coordonnées cylindriques

1. Étudier les symétries et les invariances du champ magnétique.

Solution: La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), ainsi en coordonnées cylindriques $\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{B}(r, z)$. De plus, pour un point M quelconque, le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants, et donc le champ magnétique au point M est orthogonal à ce plan. On em déduit donc que le champ magnétique est de la forme :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r, z)\boldsymbol{e_\theta}. \tag{21}$$

2. Calculer le champ magnétique dans tout l'espace. Donner l'allure des lignes de champ.

Solution: On va appliquer le théorème d'Ampère. Pour cela, on calcule la circulation du champ magnétique sur un cercle de rayon r d'axe (Oz) :

$$\mathcal{C} = 2\pi r B(r, z). \tag{22}$$

Par ailleurs d'après le théorème d'Ampère, $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\mathrm{e}}$, où I_{e} désigne l'intensité enlacée. Si le cercle de rayon n'est pas inclus dans le tore alors l'intensité enlacée est nulle, et donc $\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{0}$. Si le cercle est inclus dans le tore alors l'intensité enlacée vaut $I_{\mathrm{e}} = NI$. On en déduit donc le champ magnétique dans tout l'espace :

$$\boldsymbol{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}\boldsymbol{e_\theta} \text{ si } M \in \mathcal{T} \\ \boldsymbol{0} \text{ si } M \notin \mathcal{T} \end{cases}, \tag{23}$$

en notant $\mathcal{T}$ le tore. En particulier, on constate que le champ magnétique ne dépend pas de z.
Les lignes de champ sont donc des cercles concentriques à l'intérieur du tore, de même axe que ce dernier.

3. Calculer le flux du champ magnétique à travers les spires du tore. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\Phi = LI$, où L est un coefficient à déterminer (inductance propre du tore).

Solution: On calcule le flux du champ magnétique à travers une section $\mathscr{S}$ carrée du tore ($\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\boldsymbol{e_\theta}$) :

$$\phi = \iint_{M\in\mathscr{S}} \boldsymbol{B}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}z\int_{b-a/2}^{b+a/2}\mathrm{d}r\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}z\int_{b-a/2}^{b+a/2}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

L'intégrale sur z se calcule aisément, et celle sur r s'intègre facilement en un logarithme, soit :

$$\phi = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\int_{b-a/2}^{b+a/2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\left[\ln r\right]_{b-a/2}^{b+a/2} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a/2}{b-a/2}\right).$$

Le flux total s'obtient alors en sommant le flux ϕ pour chaque spire, soit finalement :

$$\Phi = LI \text{ avec } L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a/2}{b-a/2}\right). \tag{24}$$

6 Modèle planétaire de l'atome (**)

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron qu'on va étudier de manière classique (non quantique). On étudiera le système dans le référentiel $\mathcal{R}$ du proton supposé galiléen. On notera O la position du proton et M celle de l'électron.

1. Faire l'inventaire des forces en présence. Par un calcul d'ordre de grandeur, montrer que seule la force d'interaction électrostatique entre le proton et l'électron est pertinente. On négligera toute dissipation du mouvement de l'électron.

Solution: L'électron, en l'absence de toute dissipation, subit deux forces : la force d'interaction gravitationnelle et la force d'interaction électrostatique exercées par le proton. Leurs expressions sont respectivement :

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{grav}} = -\frac{\mathscr{G} m_{\mathrm{p}} m_{\mathrm{e}}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3}\boldsymbol{OM}$$

et

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{OM}\|^3}\boldsymbol{OM}.$$

On compare alors l'ordre de grandeur de ces deux forces :

$$\begin{aligned}
\frac{\|\boldsymbol{F}_{\mathbf{grav}}\|}{\|\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}}\|} &= \frac{\mathscr{G} m_{\mathrm{p}} m_{\mathrm{e}}}{e^2/(4\pi\varepsilon_0)} \\
&= \frac{4\pi\varepsilon_0 \mathscr{G} m_{\mathrm{p}} m_{\mathrm{e}}}{e^2} \\
&\simeq \frac{4\pi \times (8{,}85 \times 10^{-12}) \times (6{,}67 \times 10^{-11}) \times (1{,}67 \times 10^{-27}) \times (9{,}1 \times 10^{-31})}{(1{,}6 \times 10^{-19})^2} \\
&\simeq \frac{4\pi \times 8{,}85 \times 6{,}67 \times 1{,}67 \times 9{,}1}{1{,}6^2} \times \frac{10^{-12} \times 10^{-11} \times 10^{-27} \times 10^{-31}}{10^{-38}} \\
&\simeq 4 \times 8{,}85 \times 6{,}67 \times 1{,}67 \times 9{,}1 \times 10^{-43} \\
&\simeq 4 \times 6{,}67 \times 1{,}67 \times 10^{-41} \\
&\simeq 4 \times 10^{-40}
\end{aligned} \quad . \tag{25}$$

On peut donc logiquement négliger la force d'interaction gravitationnelle par rapport à la force d'interaction électrostatique.

2. Montrer que le moment cinétique de l'électron au point O est conservé. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.

Solution: On applique le théorème du moment cinétique à l'électron dans le référentiel $\mathcal{R}$. Ce dernier subit uniquement la force d'attraction électrostatique . Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\mathcal{M}_O}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}})$$

La force $\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}}$ étant centrale, son moment de force $\boldsymbol{\mathcal{M}_O}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}})$ au point O est nul :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_O}(\boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}}) = \boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{F}_{\mathbf{elec}} = \mathbf{0}.$$

Le moment cinétique $\boldsymbol{L_O}$ est donc conservé. Par ailleurs, il s'écrit : $\boldsymbol{L_O} = m_{\mathrm{e}}\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{v_{\mathcal{R}}}$ (où $\boldsymbol{v_{\mathcal{R}}}$ désigne la vitesse de l'électron dans le référentiel $\mathcal{R}$). À chaque instant, le vecteur position et le vecteur vitesse sont contenus dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{L_O}$, qui est conservé. Ainsi, le mouvement de l'électron est plan, contenu dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{L_O}$.

On étudie par la suite le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène qui repose sur plusieurs hypothèses :
- L'électron possède des trajectoires circulaires stables autour du proton.
- L'électron peut transiter d'une orbite circulaire à une autre par absorption d'un quantum d'énergie (photon) $E = h\nu$.
- Le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié : $\|\boldsymbol{L_O}\| = n\hbar$ (avec $\hbar$ la constante de Planck réduite et n un entier naturel).

3. Exprimer le moment cinétique en fonction du rayon r_n de l'orbite et ω_n la vitesse angulaire de l'électron sur son orbite.

Solution: On se place en coordonnées polaires de centre O. Le moment cinétique s'écrit alors :

$$\boldsymbol{L_O} = m_\mathrm{e}\left(r_n\boldsymbol{e_r}\right) \wedge \left(r_n\omega_n\boldsymbol{e_\theta}\right) = m_\mathrm{e}r_n^2\omega_n\boldsymbol{e_z}. \tag{26}$$

4. En utilisant un théorème de mécanique, obtenir une relation entre ω_n et r_n. Puis en déduire les expressions de r_n et de la vitesse de l'électron v_n en fonction de n. Retrouver l'expression du rayon de Bohr a_0 et donner sa valeur numérique. Définir également une vitesse caractéristique v_0 dont on donnera l'expression et la valeur numérique.

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$m_\mathrm{e}\boldsymbol{a_\mathcal{R}} = \boldsymbol{F_{\mathrm{elec}}},$$

où $\boldsymbol{a_\mathcal{R}}$ désigne l'accélération de l'électron dans le référentiel $\mathcal{R}$. On se place en coordonnées polaires, ce qui permet de réécrire l'égalité vectorielle précédente sous la forme :

$$m_\mathrm{e}\left(-r_n\omega_n^2\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2},$$

où seule la composante radiale est non nulle. On obtient finalement :

$$\omega_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e} r_n^3}. \tag{27}$$

Par ailleurs, dans le modèle de Bohr, on a :

$$\|\boldsymbol{L_O}\| = m_\mathrm{e}r_n^2\omega_n = n\hbar,$$

soit en passant cette égalité au carré et en utilisant l'Éq. (27) :

$$\begin{aligned} m_\mathrm{e}^2 r_n^4\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e} r_n^3} &= n^2\hbar^2 \\ r_n &= \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e}e^2}\times n^2, \\ r_n &= a_0\times n^2 \end{aligned} \tag{28}$$

où a_0 est le rayon de Bohr :

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e}e^2} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_\mathrm{e}e^2} \simeq 0{,}53\,\text{Å}. \tag{29}$$

On trouve alors aisément la vitesse de l'électron :

$$v_n = r_n\omega_n = \frac{\|\boldsymbol{L_O}\|}{m_\mathrm{e}r_n} = \frac{n\hbar}{m_\mathrm{e}a_0n^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar} = \frac{v_0}{n}, \tag{30}$$

où v_0 est une vitesse caractéristique d'orbite de l'électron :

$$v_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = 2{,}2\times 10^6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \tag{31}$$

5. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron est conservée. Montrer qu'elle se met sous la forme $E_n = -\mathrm{Ry}/n^2$, où Ry est le Rydberg, dont on donnera l'expression et la valeur numérique.

Solution: L'électron est soumis à une seule force qui est conservative. Ainsi l'énergie mécanique de l'électron est conservée, et elle s'écrit :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} r_n^2 \omega_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

On utilise alors la conservation du moment cinétique pour écrire : $\omega_n = \|\boldsymbol{L_O}\| / (m_\mathrm{e} r_n^2)$, soit :

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{\boldsymbol{L_O}^2}{2 m_\mathrm{e} r_n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

On utilise alors l'expression de r_n obtenue précédemment, et on obtient :

$$E_{\mathrm{m},n} = \frac{\hbar^2}{2 m_\mathrm{e} a_0^2 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0 n^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0 n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 n^2} = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2}, \tag{32}$$

où Ry est le Rydberg qui s'écrit :

$$\mathrm{Ry} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = \frac{m_\mathrm{e} e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0 \hbar\right)^2} = 2{,}2 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}6\,\mathrm{eV}. \tag{33}$$

6. Montrer que ce système se comporte comme une spire de courant dont on calculera le moment magnétique $\boldsymbol{m_n}$. Montrer qu'il se met sous la forme :

$$\boldsymbol{m_n} = -\frac{\mu_\mathrm{B}}{\hbar} \boldsymbol{L_O},$$

où on précisera l'expression du magnéton de Bohr μ_B, ainsi que sa valeur numérique. Donner également son expression en fonction de n et μ_B.

Solution: L'électron a un mouvement orbital autour du noyau et forme ainsi une boucle de courant. Le courant de cette boucle est le débit de charges par unité de temps, dont l'intensité est la charge de l'électron divisée par la période de l'orbite. Ainsi, le moment dipolaire magnétique est :

$$\boldsymbol{m_n} = I\boldsymbol{S} = \left(-e\frac{\omega_n}{2\pi}\right) \pi r_n^2 \boldsymbol{e_z} = -\frac{e}{2m_\mathrm{e}} \boldsymbol{L_O} = -\frac{\mu_\mathrm{B}}{\hbar} \boldsymbol{L_O}, \tag{34}$$

où le magnéton de Bohr est :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}} = 9{,}3 \times 10^{-24}\,\mathrm{A{\cdot}m^2}. \tag{35}$$

On termine par donner $\boldsymbol{m_n}$ en fonction de n :

$$\boldsymbol{m_n} = -n\mu_\mathrm{B} \boldsymbol{e_z}. \tag{36}$$

7 Étude d'aimants permanents (*)

1. Donner un ordre de grandeur du moment magnétique volumique $\mathcal{M}_V$ d'un aimant permanent en fonction de sa masse volumique ρ, de sa masse molaire M, du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ et du magnéton de Bohr μ_B. On supposera que le moment magnétique porté par une unique entité est $\kappa\mu_\mathrm{B}$. Donner une valeur numérique de $\mathcal{M}_V$ et du moment magnétique $\mathcal{M}$ pour un aimant cylindrique de composition

$Nd_2Fe_{14}B$ ($M = 1{,}08\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$, $\kappa \simeq 25$), de masse $m = 5{,}8\,\mathrm{g}$, de rayon $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ et de hauteur $h = 1\,\mathrm{cm}$.

> **Solution:** On peut obtenir un ordre du moment magnétique en supposant qu'il est constitué de N entités portant chacune un moment magnétique égal à $\kappa\mu_\mathrm{B}$. Un ordre de grandeur de N est obtenu par $\rho V/M \times \mathcal{N}_A$, où V désigne le volume de l'échantillon. Le moment magnétique volumique vaut alors :
>
> $$\mathcal{M}_V = \frac{\mathcal{M}}{V} = \frac{N}{V} g\mu_\mathrm{B} = \frac{\kappa\rho\mathcal{N}_A\mu_\mathrm{B}}{M}. \tag{37}$$
>
> On peut alors obtenir l'ordre de grandeur pour un aimant en néodyme, pour lequel ici $\rho = m/(\pi r^2 h)$, soit :
>
> $$\mathcal{M}_V = \frac{\kappa m\mathcal{N}_A\mu_\mathrm{B}}{\pi r^2 h M} \simeq 9{,}6 \times 10^5\,\mathrm{A{\cdot}m^{-1}} \tag{38}$$
>
> et
>
> $$\mathcal{M} = \pi r^2 h \mathcal{M}_V = \frac{\kappa m\mathcal{N}_A\mu_\mathrm{B}}{M} \simeq 0{,}75\,\mathrm{A{\cdot}m^2}. \tag{39}$$

2. On s'intéresse maintenant à deux aimants modélisés par deux moments dipolaires $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ et $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$ aux points A et B. Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre les deux moments dipolaires. On rappelle que le champ magnétique créé par un dipôle magnétique au point P s'écrit :

$$\boldsymbol{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,(\boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{PM})\,\boldsymbol{PM} - \|\boldsymbol{PM}\|^2\,\boldsymbol{\mathcal{M}}}{\|\boldsymbol{PM}\|^5},$$

et l'énergie potentielle d'un dipôle au point M dans un champ magnétique $\boldsymbol{B_0}$:

$$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{B_0}(M).$$

> **Solution:** On calcule l'énergie d'interaction entre les deux moments dipolaires :
>
> $$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{\mathcal{M}_2}\cdot\boldsymbol{B_1}(B),$$
>
> où $\boldsymbol{B_1}$ désigne le champ magnétique créé par le moment dipolaire $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ au point B. Cela donne alors, en utilisant l'expression du champ magnétique créé par un dipôle :
>
> $$E_\mathrm{p} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\,(\boldsymbol{\mathcal{M}_1}\cdot\boldsymbol{AB})\,(\boldsymbol{\mathcal{M}_2}\cdot\boldsymbol{AB}) - \|\boldsymbol{AB}\|^2\,(\boldsymbol{\mathcal{M}_1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}_2})}{\|\boldsymbol{AB}\|^5}. \tag{40}$$

3. On suppose les deux moments dipolaires alignés avec le vecteur $\boldsymbol{AB}$. Simplifier l'expression de l'énergie potentielle.

> **Solution:** Dans le cas où les deux moments dipolaires sont alignés avec le vecteur $\boldsymbol{AB}$, on a :
>
> $$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{M}_{1,2}}\cdot\boldsymbol{AB} = \mathcal{M}_{1,2}\,\|\boldsymbol{AB}\| \\ \boldsymbol{\mathcal{M}_1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}_2} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 \end{cases}.$$
>
> On obtient alors l'expression de l'énergie potentielle :
>
> $$E_\mathrm{p} = -\frac{\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{2\pi\,\|\boldsymbol{AB}\|^3}. \tag{41}$$

4. En déduire la force d'interaction entre les deux dipôles. Commenter.

Solution: On prend l'opposé du gradient de l'énergie potentielle en notant $r = \|\boldsymbol{AB}\|$, soit :

$$\boldsymbol{F_{1\to2}} = -\boldsymbol{\nabla}E_\mathrm{p} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{2\pi r^4}\boldsymbol{e_r} = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{2\pi\|\boldsymbol{AB}\|^5}\boldsymbol{AB} \tag{42}$$

Cette force est attractive et tend à coller les deux aimants. Elle varie comme $1/r^4$ et est proportionnelle aux deux moments. Par ailleurs, il s'agit d'un majorant de la force d'interaction, car on s'est mis dans la situation la plus favorable où les deux moments dipolaires sont alignés entre-eux et avec le vecteur liant leurs deux centres de masse.

5. On suppose les aimants au contact. De plus, on prendra deux aimants identiques dont les caractéristiques sont données en question 1. Donner une estimation de la force.

Solution: Quand les deux aimants sont au contact, on a $r = h$, soit :

$$\|\boldsymbol{F_{1\to2}}\| = \frac{3\mu_0\mathcal{M}^2}{2\pi h^4} \simeq 34\,\mathrm{N}. \tag{43}$$

8 Calcul d'une densité de courants (***)

On suppose qu'une distribution volumique de courants $\boldsymbol{j}(M)$ crée en tout point de l'espace un champ magnétique qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{B}(M) = B(r)\boldsymbol{e_\theta} = \begin{cases} B_1\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } r < a \\ B_2\dfrac{a}{r}\boldsymbol{e_\theta} & \text{si } r > a \end{cases}. \tag{44}$$

1. En utilisant le théorème d'Ampère sur plusieurs contours judicieusement choisis, calculer $\boldsymbol{j}(M)$ dans tout l'espace.

Solution: On commence par appliquer le théorème d'Ampère sur un contour orienté dirigé par les vecteurs $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_z}$ (et donc orthogonal à $\boldsymbol{e_\theta}$) passant par les points $M(r,\theta,z)$, $M'(r,\theta,z+\mathrm{d}z)$, $M''(r+\mathrm{d}r,\theta,z+\mathrm{d}z)$ et $M'''(r+\mathrm{d}r,\theta,z)$ dans ce sens, avec $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ positifs. La circulation du champ magnétique sur ce contour est nulle car aucun côté n'est dirigé selon $\boldsymbol{e_\theta}$. En utilisant le théorème d'Ampère, on obtient que l'intensité enlacée par ce contour est nulle, qui par ailleurs vaut $j_\theta(r,\theta,z)\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, soit :

$$j_\theta(r,\theta,z) = 0.$$

On applique maintenant le théorème d'Ampère sur un contour orienté dirigé par les vecteurs $\boldsymbol{e_\theta}$ et $\boldsymbol{e_z}$ (et donc orthogonal à $\boldsymbol{e_r}$). Ce contour passe par les points $M(r,\theta,z)$, $M'(r,\theta,z+\mathrm{d}z)$, $M''(r,\theta+\mathrm{d}\theta,z+\mathrm{d}z)$ et $M'''(r,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$, avec $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\theta$ positifs. La circulation sur ce contour fait intervenir uniquement les segments dirigés selon $\boldsymbol{e_\theta}$:

$$\mathrm{d}^2\mathcal{C} = -\int_\theta^{\theta+\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{B}(r,\theta',z+\mathrm{d}z)\cdot(r\mathrm{d}\theta'\boldsymbol{e_\theta}) + \int_\theta^{\theta+\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{B}(r,\theta',z)\cdot(r\mathrm{d}\theta'\boldsymbol{e_\theta}) = 0,$$

car le champ magnétique ne dépend pas de z. En utilisant le théorème d'Ampère, on obtient que l'intensité enlacée par ce contour est elle-aussi nulle. Par ailleurs, elle s'écrit $j_r(r,\theta,z)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, ce qui permet d'en conclure que :

$$j_r(r,\theta,z) = 0.$$

Enfin, on applique le théorème d'Ampère sur un contour orienté dirigé par les vecteurs $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ (orthogonal à $\boldsymbol{e_z}$), délimité par les points $M(r,\theta,z)$, $M'(r+\mathrm{d}r,\theta,z)$, $M''(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$ et $M'''(r,\theta+\mathrm{d}\theta,z)$, avec $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}\theta$ positifs. Le calcul de la circulation du champ magnétique donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\mathcal{C} &= \int_\theta^{\theta+\mathrm{d}\theta} \boldsymbol{B}(r+\mathrm{d}r,\theta',z)\cdot\left[(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta'\boldsymbol{e_\theta}\right] - \int_\theta^{\theta+\mathrm{d}\theta} \boldsymbol{B}(r,\theta',z)\left[r\mathrm{d}\theta'\boldsymbol{e_\theta}\right] \\ &= B(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta - B(r)r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Par ailleurs le théorème d'Ampère indique que $\mathrm{d}^2\mathcal{C} = \mu_0\mathrm{d}^2I_\mathrm{e}$ où $\mathrm{d}^2I_\mathrm{e} = j_z(r,\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ est l'intensité enlacée, soit :

$$j_z(r,\theta,z) = \frac{1}{\mu_0 r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB).$$

En utilisant l'expression du champ magnétique, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{j}(M) = \begin{cases}\dfrac{3B_1 r}{\mu_0 a^2}\boldsymbol{e_z} \text{ si } r<a \\ \boldsymbol{0} \text{ si } r>a\end{cases}. \tag{45}$$

2. Donner une condition sur B_1 et B_2 pour l'existence d'une densité surfacique de courants. La calculer le cas échéant en utilisant la relation de passage du champ magnétique à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\boldsymbol{B_2}(M) - \boldsymbol{B_1}(M) = \mu_0\boldsymbol{j_\mathrm{s}}(M)\wedge\boldsymbol{n_{1\to2}}(M),$$

où $\boldsymbol{n_{1\to2}}(M)$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de 1 vers 2 au point M.

Solution: Si $B_1 = B_2$, alors le champ magnétique est continu en $r=a$ et donc tout dans l'espace, ce qui exclut la présence d'une densité surfacique de courants.
Si $B_1 \neq B_2$, alors le champ magnétique est discontinu en $r=a$, ce qui traduit l'existence d'une densité surfacique de courants en $r=a$. On calcule la différence entre les champs magnétiques en $r=a$:

$$\Delta\boldsymbol{B}(r=a) = (B_2 - B_1)\,\boldsymbol{e_\theta}.$$

Or, $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$ est a priori de la forme :

$$\boldsymbol{j_\mathrm{s}} = j_{\mathrm{s},\theta}(\theta,z)\boldsymbol{e_\theta} + j_{\mathrm{s},z}(\theta,z)\boldsymbol{e_z}.$$

Comme le vecteur unitaire normal extérieur est le vecteur $\boldsymbol{e_r}$, on en déduit par la relation de passage que $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$ est uniquement dirigé selon $\boldsymbol{e_z}$, et par ailleurs :

$$\Delta\boldsymbol{B}(r=a) = \mu_0\,\|\boldsymbol{j_\mathrm{s}}\|\,\boldsymbol{e_\theta},$$

soit en $r=a$:

$$\boldsymbol{j_\mathrm{s}} = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}\boldsymbol{e_z}. \tag{46}$$

9 Théorie de London de la supraconductivité (**)

On s'intéresse à un supraconducteur, qui a un comportement analogue à celui d'un conducteur parfait, en particulier on peut assimiler le système à un gaz parfait d'électrons. Dans tout l'exercice, on se placera dans l'ARQS magnétique.

1. En appliquant les lois de la dynamique, trouver une relation entre la densité de courants $\boldsymbol{j}$ et le champ électrique $\boldsymbol{E}$. On supposera les électrons non relativistes. On introduira une constante λ_{L} homogène à une longueur (longueur de London) dont on déterminera un ordre de grandeur, et on commentera la relation obtenue.

Solution: On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ du supraconducteur supposé galiléen et on applique le principe fondamental de la dynamique à un électron uniquement soumis à la force électrique (conducteur parfait donc aucune force de friction) :

$$m \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -e\boldsymbol{E},$$

où m désigne la masse des électrons et $-e$ leur charge. On a négligé la force de Lorentz magnétique car le mouvement des électrons est supposé non relativiste. Comme en mécanique des fluides, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\mathcal{R}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}_{\mathcal{R}},$$

et on va négliger le terme non linéaire (second terme). On peut alors relier la densité de courants $\boldsymbol{j}$ à $\boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}$ par la relation $\boldsymbol{j} = -ne\boldsymbol{v}_{\mathcal{R}}$ où n désigne la densité numérique d'électrons, ce qui nous permet d'aboutir à la relation :

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\boldsymbol{E}. \tag{47}$$

Cette relation diffère de celle pour un conducteur ohmique (non parfait) pour lequel on a plutôt $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ avec σ la conductivité.
En utilisant l'équation de Maxwell-Ampèere, on trouve que $\mu_0 \boldsymbol{j}$ est homogène à un champ magnétique divisé par une longueur. Donc la dérivée temporelle de $\boldsymbol{j}$ est homogène à :

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\right] = \frac{[\boldsymbol{B}]}{L\,[\mu_0]\,T},$$

où L désigne une longueur et T un temps. Par ailleurs, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

on trouve que le champ électrique est homogène au champ magnétique mulitplié par une vitesse soit :

$$[\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{B}]\, LT^{-1},$$

soit finalement :

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\right] = \frac{[\boldsymbol{E}]}{L^2\,[\mu_0]}. \tag{48}$$

On obtient donc que ne^2/m est homogène à l'inverse du carré d'une longueur divisé par μ_0. Ainsi, on peut définir la longueur de London :

$$\lambda_{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}, \tag{49}$$

homogène à une longueur, de sorte que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{E}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}. \tag{50}$$

L'application numérique de la longueur de London donne alors $\lambda_{\mathrm{L}} = 1{,}7 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$ (en utilisant $n = 10^{29}\mathrm{m}^{-3}$).

2. Dans la théorie de London, on suppose qu'on peut décrire le supraconducteur par la relation phénoménologique :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j} = -\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}.$$

Montrer que cette relation est compatible avec celle obtenue à la question précédente sous certaines hypothèses.

Solution: On prend la dérivée temporelle de cette équation puis on utilise l'équation de Maxwell-Faraday pour obtenir :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j})}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2},$$

soit :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{E}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}\right) = \boldsymbol{0},$$

ou encore :

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{E}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2} = \boldsymbol{\nabla} f, \tag{51}$$

où f est un champ scalaire quelconque fonction de l'espace et du temps. Pour retrouver l'équation de la première question, il faut alors supposer que f est une fonction du temps uniquement.
De manière équivalente, on prend le rotationnel de l'équation de la question précédente, puis on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}\right) = \frac{\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2}\right) = \boldsymbol{0},$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \lambda_{\mathrm{L}}^2} = \boldsymbol{g}, \tag{52}$$

où $\boldsymbol{g}$ est un champ vectoriel dépendant de l'espace uniquement. On retrouve alors l'équation phénoménologique de London en posant $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$.

3. Obtenir l'équation vérifiée par le champ magnétique dans le supraconducteur.

Solution: On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{j},$$

puis on utilise l'équation de London :

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) = -\frac{\boldsymbol{B}}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}.$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Thomson, ainsi que la relation $\boldsymbol{\Delta B} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B})$, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{\Delta B} = \frac{\boldsymbol{B}}{\lambda_{\mathrm{L}}^2}. \tag{53}$$

4. On suppose que le supraconducteur occupe le demi-espace $x > 0$. Dans le vide occupant l'espace $x < 0$, on suppose que la composante B_y du champ magnétique est nulle. On supposera tous les champs

indépendants des variables y et z. Une autre composante du champ magnétique est nulle à l'extérieur du supraconducteur, laquelle ? Qu'en déduit-on sur la géométrie des lignes de champ ?

Solution: D'après l'équation de Maxwell-Thomson, on a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$, ce qui impose que $B_x = 0$ à l'extérieur du supraconducteur. Ainsi, les lignes de champ sont tangentes à la surface du supraconducteur. De plus, à l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique s'écrit :

$$\boldsymbol{B} = B_z \boldsymbol{e_z}. \tag{54}$$

5. Résoudre l'équation vérifiée par le champ magnétique dans le supraconducteur. On notera B_0 la norme du champ magnétique sur la surface du conducteur et on supposera le champ magnétique continu à l'interface.

Solution: On réécrit l'équation vérifiée par le champ magnétique sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\boldsymbol{B}}{\lambda_\mathrm{L}^2},$$

qui s'intègre aisément sous la forme :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x = 0) e^{-x/\lambda_\mathrm{L}},$$

où le terme en e^{x/λ_L} est absent pour que le champ ne diverge pas à l'infini. Par continuité du champ en $x = 0$, on obtient que :

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{-x/\lambda_\mathrm{L}} \boldsymbol{e_z}. \tag{55}$$

On constate que le champ magnétique s'annule sur une distance caractéristique de l'ordre λ_L, qui est donc la longueur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur. Ainsi, dans le volume d'un supraconducteur, le champ magnétique est nul. C'est l'effet Meissner : le matériau supraconducteur expulse les lignes de champ dans son volume.

6. Calculer la densité de courants à l'intérieur du supraconducteur. Commenter.

Solution: On calcule la densité de courants à partir de l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS magnétique $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$. On obtient donc que seule la composante selon $\boldsymbol{e_y}$ de la densité de courants est non nulle et s'écrit :

$$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} \boldsymbol{e_y} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_\mathrm{L}} e^{-x/\lambda_\mathrm{L}} \boldsymbol{e_y}. \tag{56}$$

Pour expulser les lignes de champ, le matériau supraconducteur développe des courants (c'est un phénomène d'induction). Ces courants sont localisés sur une épaisseur caractéristique λ_L.

7. Définir et calculer une densité surfacique de courants $\boldsymbol{j_\mathrm{s}}$ dans le supraconducteur. Commenter.

Solution: On a vu que le supraconducteur développait des courants volumiques, mais uniquement sur une épaisseur caractéristique λ_L. Pour un échantillon macroscopique de supraconducteur de taille caractéristique $L \gg \lambda_\mathrm{L}$, on peut assimiler ces courants à des courants surfaciques :

$$\boldsymbol{j_\mathrm{s}} = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{j}(x) \mathrm{d}x = \frac{B_0}{\mu_0} \boldsymbol{e_y}. \tag{57}$$

On retrouve alors la formule de passage du champ magnétique à l'interface en supposant qu'il est nul dans le supraconducteur et égal à $B_0 \boldsymbol{e_z}$ à l'extérieur et au voisinage immédiat de la surface.