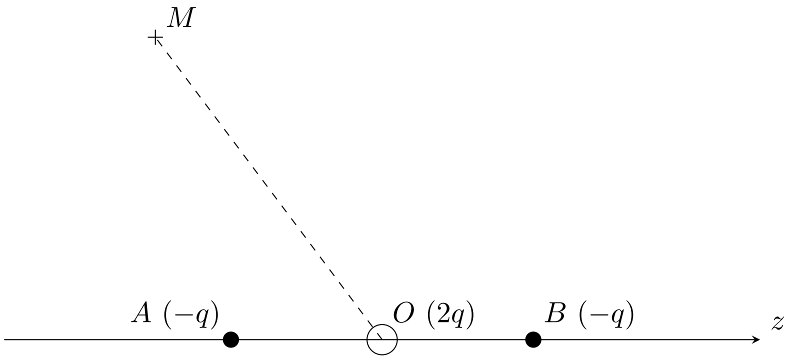
HMEF104 — Electromagnétisme

TD2 - Dipôle électrostatique

1 Quadrupôle

On considère la situation représentée ci-dessous où une charge $2q$ est placée en O, qu'on prendra comme origine du repère, tandis que deux charges $-q$ sont placées en A et B. On notera $AO = OB = a$. Les points O, A et B sont alignés, ce qui définit l'axe (Oz).



1. Donner les symétries et les invariances du champ électrique créé par la distribution de charges. En déduire qu'on peut se placer dans une base polaire où θ désigne l'angle entre le vecteur $\boldsymbol{e_z}$ et le vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$.

> **Solution:** La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), il en est donc de même du champ électrique.
> Le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Ainsi le champ électrique est contenu dans ce plan. On peut donc, dans ce plan, introduire un repère polaire de centre O et de coordonnées (r, θ).

2. Calculer directement, et dans l'hypothèse $r \gg a$, le potentiel électrostatique créé par la distribution. Commenter en comparant au résultat du dipôle.

> **Solution:** On utilise le théorème de superposition, qui nous permet d'écrire le potentiel au point M comme la superposition des potentiels créés par chacune des charges ponctuelles, soit :
>
> $$V(M) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{OM}\|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{AM}\|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{BM}\|}.$$
>
> On exprime chacune des distances intervenant dans l'équation précédente en fonction des coordonnées polaires. Par exemple, pour $\|\boldsymbol{AM}\|$:
>
> $$\|\boldsymbol{AM}\| = \|\boldsymbol{AO} + \boldsymbol{OM}\| = \sqrt{\boldsymbol{AO}^2 + \boldsymbol{OM}^2 + 2\boldsymbol{AO}\cdot\boldsymbol{OM}} = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta}.$$
>
> De la même manière on trouve que :
>
> $$\|\boldsymbol{BM}\| = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta},$$

benjamin.guiselin@umontpellier.fr

tandis que $\|\boldsymbol{OM}\| = r$. Pour simplifier l'expression du potentiel à grande distance $r \gg a$, on fait un développement limité des distances en fonction de a/r. Par exemple, pour $\|\boldsymbol{AM}\|$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{AM}\|} &= \frac{1}{r\sqrt{1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{r}\left[1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[2\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{8}\left[2\frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^2\right\}
\end{aligned}.$$

En ne conservant que les termes au plus d'ordre 2 en a/r, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\boldsymbol{AM}\|} &= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos^2\theta\right\} \\
&= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right\}
\end{aligned}.$$

Le résultat s'obtient facilement pour $\|\boldsymbol{BM}\|$ en substituant dans l'équation précédente $-a$ à a, soit :

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{BM}\|} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right\}.$$

En utilisant les équations précédentes dans l'expression du potentiel, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}&\left\{\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right]\right. \\
&\left.-\frac{1}{r}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right]\right\} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right),
\end{aligned}$$

soit :

$$V(M) = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 - 3\cos^2\theta\right). \tag{1}$$

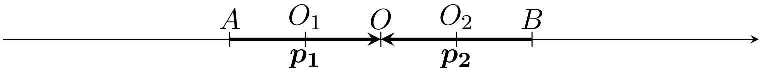
Le potentiel pour un quadrupôle décroît comme $1/r^3$, alors que celui du dipôle décroît comme $1/r^2$. Par ailleurs, les deux potentiels sont anisotropes et dépendent de $\cos\theta$.

3. Retrouver le résultat précédent à partir du potentiel créé par un dipôle. On rappelle que le potentiel électrostatique créé par un dipôle de moment $\boldsymbol{p}$ centré sur le point P s'écrit :

$$V_{\boldsymbol{p}}(M) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{4\pi\varepsilon_0\|\boldsymbol{\rho}\|^3},$$

où $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{PM}$.

Solution: On peut assimiler la distribution de charges à la superposition de deux dipôles $\boldsymbol{p_1} = qa\boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{p_2} = -qa\boldsymbol{e_z} = -\boldsymbol{p}$ (car le dipôle est toujours orienté de la charge négative vers la charge positive). On doit donc calculer la somme des potentiels créés par deux dipôles opposés et centrés sur O_1 et O_2.



On rappelle que le potentiel électrostatique créé par un dipôle de moment $\boldsymbol{p}$ centré sur le point P s'écrit :

$$V_{\boldsymbol{p}}(M) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{PM}}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\boldsymbol{PM}\right\|^3}.$$

Ainsi le potentiel créé par la somme des deux dipôles vaut :

$$V(M) = V_{\boldsymbol{p_1}}(M) + V_{\boldsymbol{p_2}}(M) = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{\boldsymbol{O_1M}}{\left\|\boldsymbol{O_1M}\right\|^3} - \frac{\boldsymbol{O_2M}}{\left\|\boldsymbol{O_2M}\right\|^3}\right] = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{O_1M}\cdot\boldsymbol{e_z}}{\left\|\boldsymbol{O_1M}\right\|^3} - \frac{\boldsymbol{O_2M}\cdot\boldsymbol{e_z}}{\left\|\boldsymbol{O_2M}\right\|^3}\right].$$

Or, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{O_1M} & = \boldsymbol{O_1O} + \boldsymbol{OM} = \dfrac{a}{2}\boldsymbol{e_z} + r\boldsymbol{e_r} \\ \boldsymbol{O_2M} & = \boldsymbol{O_2O} + \boldsymbol{OM} = -\dfrac{a}{2}\boldsymbol{e_z} + r\boldsymbol{e_r} \end{cases},$$

soit en calculant les produits scalaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{O_1M}\cdot\boldsymbol{e_z} & = \dfrac{a}{2} + r\cos\theta \\ \boldsymbol{O_2M}\cdot\boldsymbol{e_z} & = -\dfrac{a}{2} + r\cos\theta \end{cases},$$

et les normes :

$$\begin{cases} \left\|\boldsymbol{O_1M}\right\| & = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + r^2 + ar\cos\theta} = r\sqrt{1 + \dfrac{a}{r}\cos\theta + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2} \\ \left\|\boldsymbol{O_2M}\right\| & = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar\cos\theta} = r\sqrt{1 - \dfrac{a}{r}\cos\theta + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2} \end{cases}.$$

Ainsi, au premier ordre en a/r, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{O_1M}\right\|^3} & = \dfrac{1}{r^3}\left[1 + \dfrac{a}{r}\cos\theta + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2\right]^{-3/2} = \dfrac{1}{r^3}\left[1 - \dfrac{3a}{2r}\cos\theta\right] \\ \dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{O_2M}\right\|^3} & = \dfrac{1}{r^3}\left[1 - \dfrac{a}{r}\cos\theta + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2\right]^{-3/2} = \dfrac{1}{r^3}\left[1 + \dfrac{3a}{2r}\cos\theta\right] \end{cases}.$$

En réinjectant dans l'expression du potentiel, on obtient :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\left(\frac{a}{2} + r\cos\theta\right)\left(1 - \frac{3a}{2r}\cos\theta\right) - \left(-\frac{a}{2} + r\cos\theta\right)\left(1 + \frac{3a}{2r}\cos\theta\right)\right] \\ &= \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 - 3\cos^2\theta\right) \end{aligned}. \tag{2}$$

4. En déduire le champ électrique en coordonnées polaires.

Solution: On prend le gradient du potentiel électrostatique de la question précédente. On a alors que $\boldsymbol{E}(M) = E_r(r,\theta)\boldsymbol{e_r} + E_\theta(r,\theta)\boldsymbol{e_\theta}$, où

$$\begin{cases} E_r(r,\theta) = -\dfrac{\partial V}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left(1-3\cos^2\theta\right) \\ E_\theta(r,\theta) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\sin(2\theta) \end{cases}. \tag{3}$$

5. Donner l'équation des équipotentielles. Représenter leur allure. Commenter.

Solution: Les équipotentielles sont obtenues en cherchant les lignes d'équation $V(M) = \text{Cste}$, soit :

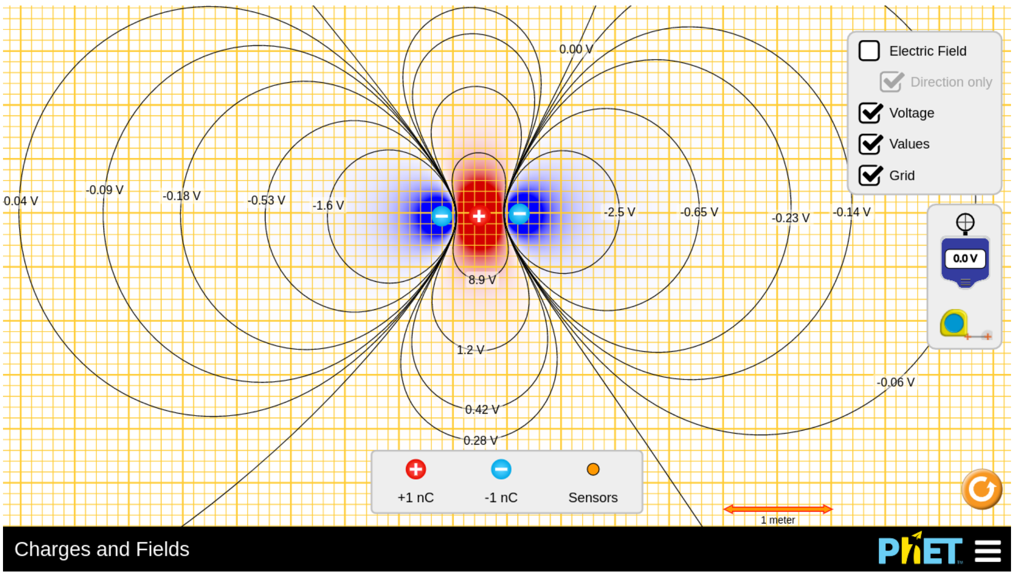
$$r(\theta) = K\left(1-3\cos^2\theta\right)^{1/3}, \tag{4}$$

où K est une constante réelle positive ou négative. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

- $r(\theta) = r(-\theta)$, ce qui reflète le fait que le potentiel est invariant par rotation autour de l'axe (Oz).
- Les équipotentielles sont invariates par la transformation $\theta \to \pi - \theta$: en effet la distribution de charges (et donc le potentiel) est symétrique par la réflexion de plan orthogonal à l'axe (Oz) passant par O.
- Quand $K \to \pm\infty$, on trouve des équipotentielles particulières d'équation :

  $$\cos^2\theta = \frac{1}{3}.$$

  Cela correspond à deux cônes de sommet O et d'angle d'ouverture $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$ dans les demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$.
- Les deux cônes précédents délimitent trois régions de l'espace : à droite du cône dans le demi-espace $z > 0$, à gauche du cône dans le demi-espace $z < 0$, ou entre les deux cônes. Les équipotentielles sont alors contenues dans les deux quadrants tels que $\theta < \arccos(1/\sqrt{3})$ et $\theta > \pi - \arccos(1/\sqrt{3})$ ($K < 0$) ou entre les deux cônes ($K > 0$).
- Proche des charges, on s'attend à ce que les équipotentielles soient des sphères centrées sur les charges.



Allure des équipotentielles, à partir du site internet :
`https://phet.colorado.edu/en/simulation/charges-and-fields`.

6. Donner l'équation des lignes de champ. Représenter leur allure. Commenter.

Solution: Soit d$\boldsymbol{\ell}(M)$ le vecteur élémentaire tangent aux lignes de champ au point M. Par définition, d$\boldsymbol{\ell}(M)$ est tangent à $\boldsymbol{E}(M)$, soit :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}(M) \wedge \boldsymbol{E}(M) = \mathbf{0}.$$

Par la suite, on note $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}(M) = \mathrm{d}r\boldsymbol{e_r} + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e_\theta}$, soit finalement :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}rE_\theta - r\mathrm{d}\theta E_r &= 0 \\ -\mathrm{d}r\sin(2\theta) - r\mathrm{d}\theta(1 - 3\cos^2\theta) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}r}{r} &= \frac{\mathrm{d}\theta(3\cos^2\theta - 1)}{\sin(2\theta)} \end{aligned}.$$

On intègre alors membre à membre :

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'} = \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta' \frac{3\cos^2\theta' - 1}{2\sin\theta'\cos\theta'}.$$

Pour le membre de droite, on fait le changement de variable $u = \cos\theta'$ ($\mathrm{d}u = -\sin\theta'\mathrm{d}\theta'$), soit :

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'} &= -\int_{\cos\theta_0}^{\cos\theta} \mathrm{d}u \frac{3u^2 - 1}{2\left(1 - u^2\right)u} \\ \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'} &= \frac{1}{2}\int_{\cos\theta_0}^{\cos\theta} \mathrm{d}u \frac{3u^2 - 1}{u^3 - u} \\ \left[\ln r'\right]_{r_0}^{r} &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|u^3 - u\right|\right]_{\cos\theta_0}^{\cos\theta} \\ \ln r &= \frac{1}{2}\ln\left|\cos^3\theta - \cos\theta\right| + \mathrm{Cste} \end{aligned},$$

soit en passant à l'exponentielle :

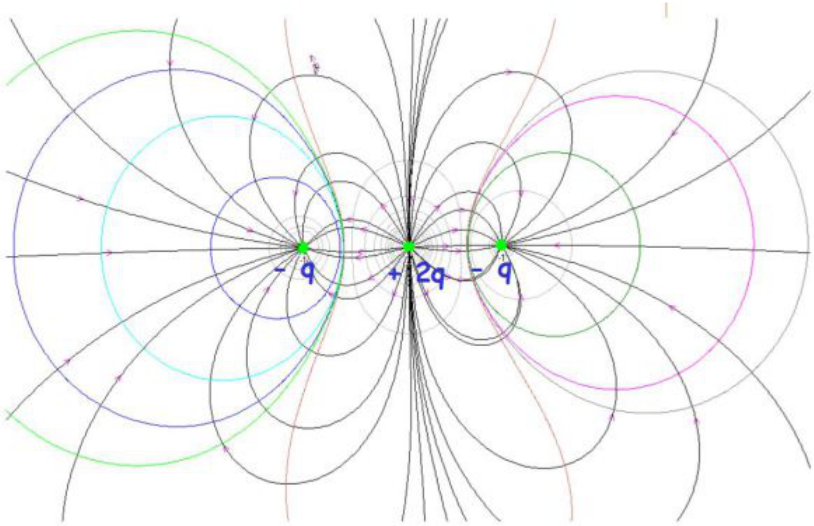
$$r(\theta) = K\sqrt{|\cos^3\theta - \cos\theta|} = K\,|\sin\theta|\,\sqrt{|\cos\theta|}, \tag{5}$$

en factorisant par $\cos\theta$ (avec K une constante réelle positive).
Plusieurs commentaires peuvent être faits :

- Les lignes de champ sont symétriques par la transformation $\theta \to -\theta$: ceci reflète le fait que la distribution de charges est symétrique par rotation autour de l'axe (Oz).
- Les lignes de champ sont symétriques par la transformation $\theta \to \pi - \theta$: ceci reflète la symétrie de la distribution de charges par la réflexion de plan orthogonal à l'axe (Oz) passant par O.
- Quand $K \to +\infty$, on trouve des lignes de champ particulières telles que :

  $$\sin\theta\sqrt{|\cos\theta|} = 0,$$

  ce qui donne $\theta = 0$, $\theta = \pi$ ou $\theta = \pm\pi/2$. Les deux premières correspondent aux lignes de champ sur l'axe (Oz) qui convergent vers les charges négatives. Les autres correspondent aux lignes de champ qui divergent de la charge positive, orthogonalement à l'axe (Oz).
- Proche des charges, les lignes de champ divergent ou convergent si la charge est positive ou négative respectivement.
- Entre les charges, les lignes de champ divergent de la charge positive pour converger vers les charges négatives.



Allure des lignes de champ, à partir du site internet :
`http://olivier.granier.free.fr/Seq10/co/ex-CCP-2-statique-E-B.html`.

7. On place le quadrupôle dans un champ extérieur uniforme. Calculer la force et le moment de couple qu'il subit.

Solution: On place le quadrupôle dans un champ $\boldsymbol{E_0}$ uniforme. La force subie par le quadrupôle est la somme des forces subies par chacune des charges dans le champ électrique, soit :

$$\boldsymbol{F} = -q\boldsymbol{E_0} + 2q\boldsymbol{E_0} - q\boldsymbol{E_0} = \boldsymbol{0}. \tag{6}$$

Le moment de couple en un point C s'obtient de la même façon :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{M}}_C &= \boldsymbol{CA} \wedge (-q\boldsymbol{E_0}) + \boldsymbol{CO} \wedge (2q\boldsymbol{E_0}) + \boldsymbol{CB} \wedge (-q\boldsymbol{E_0}) \\ &= q\,(-\boldsymbol{CA} + 2\boldsymbol{CO} - \boldsymbol{CB}) \wedge \boldsymbol{E_0} \\ &= q\,(-\boldsymbol{CO} - \boldsymbol{OA} + 2\boldsymbol{CO} - \boldsymbol{CO} - \boldsymbol{OB}) \wedge \boldsymbol{E_0} \\ &= -q\,(\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) \wedge \boldsymbol{E_0}\end{aligned},$$

soit finalement :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

pour tout point C, car O est le milieu du segment $[AB]$.
Le résultat aurait pu être trouvé encore plus facilement en utilisant l'analogie avec le dipôle. On rappelle que pour un dipôle de moment dipolaire $\boldsymbol{p}$, la force qu'il subit dans un champ uniforme est $\boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{0}$, et le moment de couple $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{C,\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{E_0}$. Ainsi, on obtient pour la force :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{p_1}} + \boldsymbol{F_{p_2}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \tag{8}$$

et pour le moment :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{C,\boldsymbol{p_1}} + \boldsymbol{\mathcal{M}}_{C,\boldsymbol{p_2}} = \boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{E_0} + \boldsymbol{p_2} \wedge \boldsymbol{E_0} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$

en utilisant le fait que $\boldsymbol{p_1} = -\boldsymbol{p_2}$.

2 Interaction de Debye

On considère un dipôle permanent de moment $\boldsymbol{p}$ placé au point O. Au point M, on place une molécule capable d'acquérir un moment dipolaire induit. On notera α la polarisabilité de la molécule, p la norme de

$\boldsymbol{p}$, et $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ le vecteur position de la molécule.

1. Donner l'expression $\boldsymbol{p}'$ du moment dipolaire induit en fonction du champ électrique $\boldsymbol{E}(M)$ créé par le dipôle $\boldsymbol{p}$. En déduire l'unité de α dans le système international, en fonction d'unités dérivées, puis en fonction des unités de base.

> **Solution:** Par définition de la polarisabilité, on a :
>
> $$\boldsymbol{p}' = \alpha \boldsymbol{E}(M). \tag{10}$$
>
> Le moment dipolaire s'exprime en C·m, tandis que le champ électrique s'exprime en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Ainsi, on trouve que α s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^2 \cdot V^{-1}}$. Or le volt peut se réécrire comme une énergie par unité de charge, et donc α peut aussi s'exprimer en $\mathrm{C^2 \cdot m^2 \cdot J^{-1}}$. L'intensité du courant étant une charge par unité de temps, et en utilisant l'expression de l'énergie cinétique, on obtient que dans les unités du système international, la polarisabilité s'exprime en $\mathrm{A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1}}$.

2. Rappeler l'expression du champ créé par le dipôle permanent au point M. On introduira un repère sphérique $(O, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi})$ et on prendra pour axe (Oz) celui du dipôle.

> **Solution:** Le champ électrique s'écrit en coordonnées sphériques :
>
> $$\begin{cases} E_r(r,\theta,\varphi) &= \dfrac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta(r,\theta,\varphi) &= \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\varphi(r,\theta,\varphi) &= 0 \end{cases}. \tag{11}$$
>
> En effet, dans le cours, nous l'avons démontré pour un repère polaire, mais ce repère polaire correspond en réalité à un repère sphérique dans un plan d'équation $\varphi = \text{Cste}$. Une autre manière de se convaincre du résultat serait de repartir de l'expression intrinsèque du champ électrique, et de la projeter dans la base sphérique.

3. On rappelle que dans un champ non uniforme, la force subie par le dipôle induit $\boldsymbol{p}'$ s'écrit $\boldsymbol{F} = (1/2)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{E})$. Montrer que la force dérive d'une énergie potentielle $E_{\mathrm{p,e}}$ qu'on exprimera en fonction de p, α, ε_0, et des coordonnées sphériques.

> **Solution:** La force peut se réécrire sous la forme :
>
> $$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} E_{\mathrm{p,e}}, \text{ avec } E_{\mathrm{p,e}} = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{E}(M)\right) = -\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{E}^2(M). \tag{12}$$
>
> Il suffit maintenant de calculer la norme du champ électrique, en utilisant son expression donnée à la question précédente :
>
> $$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^2(M) &= \left[\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e_r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e_\theta}\right]^2 \\ &= \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 \left[4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] \end{aligned},$$
>
> soit finalement pour l'énergie potentielle :
>
> $$E_{\mathrm{p,e}} = -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 \left(1 + 3\cos^2\theta\right). \tag{13}$$

4. La force précédente, ainsi que l'énergie potentielle, sont des quantités instantanées qui fluctuent de façon aléatoire. Expliquer pourquoi. En déduire qu'il faut moyenner l'énergie potentielle sur θ et φ.

Solution: Du fait des fluctuations thermiques, l'orientation du dipôle permanent $\boldsymbol{p}$ varie. Cela revient à dire que l'axe (Oz) des coordonnées sphériques varie au cours du temps de façon aléatoire, la distance entre les deux dipôles étant fixée. Dire que la molécule au point M est fixe et que l'axe (Oz) varie est équivalent à dire que l'axe (Oz) est fixe, mais que les coordonnées angulaires θ et φ de la molécule M varie spatialement. Ces fluctuations thermiques sont très rapides par rapport au temps typique d'observation des dipôles, on en déduit qu'il faut moyenner l'énergie potentielle précédente sur les angles θ et φ.

5. On rappelle que la définition de la moyenne d'une quantité $A(\theta,\varphi)$ s'écrit :

$$\overline{A} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta A(\theta,\varphi).$$

Calculer $\overline{E_{\mathrm{p,e}}}$.

Solution: La moyenne de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\overline{E_{\mathrm{p,e}}} = -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta \left(1+3\cos^2\theta\right).$$

L'intégration sur la variable φ donne un facteur 2π, et on obtient donc :

$$\overline{E_{\mathrm{p,e}}} = -\frac{\alpha p^2}{64\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta \left(1+3\cos^2\theta\right).$$

Pour calculer l'intégrale sur la variable θ, on fait le changement de variable $u = \cos\theta$ ($\mathrm{d}u = -\sin\theta \mathrm{d}\theta$) :

$$\begin{aligned}\overline{E_{\mathrm{p,e}}} &= -\frac{\alpha p^2}{64\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \left(1+3u^2\right)\\ &= -\frac{\alpha p^2}{64\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}\left[u+u^3\right]_{-1}^{1}\end{aligned},$$

soit enfin :

$$\overline{E_{\mathrm{p,e}}} = -\frac{\alpha p^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}. \tag{14}$$

6. Montrer finalement que la force moyenne entre le dipôle permanent $\boldsymbol{p}$ et la molécule de polarisabilité α à la distance r s'écrit :

$$\overline{\boldsymbol{F}} = -\frac{3\alpha p^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^8}\boldsymbol{r}.$$

Commenter.

Solution: La force étant l'opposée du gradient de l'énergie potentielle, on obtient :

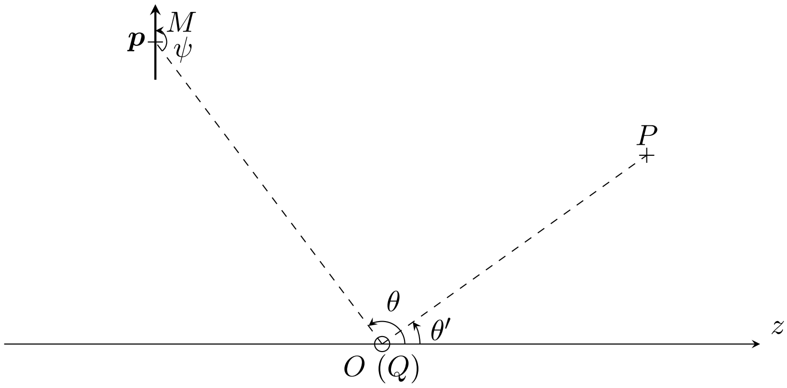
$$\overline{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{\nabla}\overline{E_{\mathrm{p,e}}} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\alpha p^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^6}\right).$$

En calculant le gradient en coordonnées sphériques, on obtient :

$$\overline{\boldsymbol{F}} = -\frac{6\alpha p^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^7}\boldsymbol{e_r} = -\frac{3\alpha p^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^8}\boldsymbol{r}, \tag{15}$$

en utilisant le fait que $\boldsymbol{e_r} = \boldsymbol{r}/r$. Cette force est dirigée selon $-\boldsymbol{e_r}$, elle est donc attractive et tend à attirer la molécule vers le dipôle permanent.

3 Interaction entre un dipôle et une charge ponctuelle



On considère un dipôle de moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ au point M et une charge ponctuelle de charge Q au point O. On notera $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ et p la norme de $\boldsymbol{p}$.

1. On rappelle que le champ électrique créé en un point P par le dipôle s'écrit :

$$\boldsymbol{E_p}(P) = \frac{3\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^2\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0\,\|\boldsymbol{\rho}\|^5},$$

où $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{MP}$. On introduit un repère sphérique centré sur la charge. On notera ψ l'angle entre $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r}$, (r, θ, φ) les coordonnées de M et $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi})$ les vecteur de base au point M. Donner l'expression du champ $\boldsymbol{E_p}(O)$ créé au point O par le dipôle dans ce système de coordonnées en fonction des vecteurs de base au point M.

Solution: Si $P = O$, alors $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{MO} = -\boldsymbol{r}$. Ainsi, on a pour l'expression du champ électrique :

$$\boldsymbol{E_p}(O) = \frac{3\,(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^2\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0\,\|\boldsymbol{r}\|^5},$$

On projette $\boldsymbol{p}$ dans le repère sphérique :

$$\boldsymbol{p} = p\left(-\cos\psi\boldsymbol{e_r} - \sin\psi\boldsymbol{e_\theta}\right),$$

ce qui nous permet de calculer le produit scalaire $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = -pr\cos\psi$. Ainsi le champ électrique s'écrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E_p}(O) &= \frac{3\,(-pr\cos\psi)\,r\boldsymbol{e_r} - pr^2\left[-\cos\psi\boldsymbol{e_r} - \sin\psi\boldsymbol{e_\theta}\right]}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-3\cos\psi\boldsymbol{e_r} + \cos\psi\boldsymbol{e_r} + \sin\psi\boldsymbol{e_\theta}\right] \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-2\cos\psi\boldsymbol{e_r} + \sin\psi\boldsymbol{e_\theta}\right]\end{aligned} \quad . \tag{16}$$

2. En déduire la force $\boldsymbol{F_{p\to Q}}$ exercée par le dipôle sur la charge au point M.

 benjamin.guiselin@umontpellier.fr

Solution: La force subie par la charge Q au point M s'écrit :

$$\boldsymbol{F_{p\to Q}} = Q\boldsymbol{E_p}(O) = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-2\cos\psi \boldsymbol{e_r} + \sin\psi \boldsymbol{e_\theta}\right]. \tag{17}$$

3. Donner l'expression du champ électrique $\boldsymbol{E}_Q(O)$ créé par la charge électrique Q au point O dans la base sphérique.

Solution: Le champ électrique créé par la charge Q s'écrit :

$$\boldsymbol{E}_Q(O) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e_r}. \tag{18}$$

4. Calculer les dérivées partielles de ψ par rapport à r et θ. On pourra utiliser le produit scalaire $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e_r}$.

Solution: Quand r varie à θ fixé, ψ ne change pas, et donc :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0. \tag{19}$$

Pour calculer la dérivée par rapport à θ, on calcule le produit scalaire de $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = -pr\cos\psi,$$

et on dérive membre à membre par rapport à θ. Dans le membre de gauche, $\boldsymbol{p}$ est un vecteur constant (indépendant de θ) et donc :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = r\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e_r}}{\partial\theta} = r\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e_\theta} = -pr\sin\psi,$$

où on a utilisé le fait qu'en coordonnées sphériques $\partial\boldsymbol{e_r}/\partial\theta = \boldsymbol{e_\theta}$. Pour le membre de droite, la dérivée par rapport à θ donne :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-pr\cos\psi) = pr\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

ce qui nous permet de conclure que :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -1. \tag{20}$$

5. On rappelle que la force subie par le dipôle dans un champ extérieur $\boldsymbol{E}$ s'écrit $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$. Calculer la force $\boldsymbol{F_{Q\to p}}$ exercée par la charge sur le dipôle. Commenter.

Solution: La force qu'exerce la charge sur le dipôle s'écrit :

$$\boldsymbol{F_{Q\to p}} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_Q(O)).$$

On calcule d'abord la quantité à l'intérieur du gradient :

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_Q(O) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e_r}) = -\frac{Qp\cos\psi}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

où on a utilisé que $\boldsymbol{p} = p\,(-\cos\psi \boldsymbol{e_r} - \sin\psi \boldsymbol{e_\theta})$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Q\to\boldsymbol{p}} &= -\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\cos\psi}{r^2}\right)\\ &= -\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\psi}{r^2}\right)\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\psi}{r^2}\right)\boldsymbol{e_\theta}\right]\end{aligned}.$$

Pour poursuivre, on utilise le résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient pour la force :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Q\to\boldsymbol{p}} &= -\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0}\left[-2\frac{\cos\psi}{r^3}\boldsymbol{e_r} - \frac{1}{r}\times\frac{\sin\psi}{r^2}\times\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e_\theta}\right]\\ &= -\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-2\cos\psi\boldsymbol{e_r} + \sin\psi\boldsymbol{e_\theta}\right]\end{aligned}. \tag{21}$$

On retrouve bien la troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques), à savoir que :

$$\boldsymbol{F}_{Q\to\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{p}\to Q}. \tag{22}$$

4 Modèle de Thomson

On souhaite décrire microscopiquement la polarisabilité d'un atome, c'est-à-dire le mouvement du noyau et du nuage électronique quand on impose un champ électrique. Pour cela, on considère un unique atome de numéro atomique Z, soumis à un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$.

1. Écrire l'équation du mouvement d'un électron i. On notera $\boldsymbol{r_i}$ son vecteur position, m_e sa masse, $\boldsymbol{f_i}$ la force exercée par le noyau sur l'électron i, et $\boldsymbol{f_{j\to i}}$ la force exercée par l'électron j sur l'électron i. On supposera que l'électron perd de l'énergie au cours de son mouvement, du fait du rayonnement qu'il émet, ce qui se traduit par une force supplémentaire proportionnelle à la vitesse de l'électron, avec un coefficient de proportionnalité m_e/τ. On considérera que le mouvement des électrons est non relativiste, de sorte que l'effet du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique.

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, en tenant compte de la force exercée par le noyau, par les autres électrons, de la force d'amortissement, et de celle exercée par le champ extérieur :

$$m_\mathrm{e}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_i}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{j\neq i}\boldsymbol{f_{j\to i}} + \boldsymbol{f_i} - e\boldsymbol{E} - \frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}. \tag{23}$$

2. En déduire l'équation d'évolution de la position $\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$ du barycentre des charges négatives. On introduira $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{Z}\boldsymbol{f_i}/Z$.

Solution: On somme les équations précédentes pour tous les électrons, et on obtient :

$$m_\mathrm{e}\sum_{i=1}^{Z}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_i}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{Z}\left[\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f_{j\to i}} + \boldsymbol{f_i} - e\boldsymbol{E} - \frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_i}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}\right].$$

On introduit alors la position du barycentre des charges négatives :

$$\boldsymbol{r_\mathrm{e}} = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{Z}\boldsymbol{r_i},$$

de sorte qu'on obtient :

$$Zm_\mathrm{e}\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t^2}\right|_\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{Z}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f_{j\to i}} + Z\boldsymbol{F} - Ze\boldsymbol{E} - \frac{Zm_\mathrm{e}}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}.$$

Or, d'après la troisième loi de Newton, $\boldsymbol{f_{i\to j}} = -\boldsymbol{f_{j\to i}}$, de sorte que la double somme s'annule. On obtient donc finalement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t^2}\right|_\mathcal{R} + \frac{1}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_\mathrm{e}} - \frac{e}{m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E}. \tag{24}$$

3. Par la suite, on suppose que $\boldsymbol{F} = m_\mathrm{e}\omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$. Justifier. Donner la dimension de ω_0, ainsi que son interprétation physique. Donner également un ordre de grandeur de ω_0 en fonction du rayon typique de l'atome a_0, de ε_0, et des données du problème. Faire l'application numérique pour l'atome d'hydrogène. Dans quel domaine de fréquences se trouve ω_0 ?

Solution: On suppose que le nuage électronique est lié au noyau, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se déplacer sur des distances macroscopiques. Dans ce cas, quitte à faire un changement de l'origine du repère, on peut considérer qu'à l'équilibre (en l'absence de champ électrique), on a $\boldsymbol{r_\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$. Quand on place un champ électrique, le nuage électronique se déplace de façon opposée au champ, et quitte sa position d'équilibre. Si on suppose que le déplacement est suffisamment faible devant la distance typique sur laquelle la force exercée par le noyau varie de façon significative, alors on peut faire un développement limité à l'ordre 1 de cette force, ce qui donne l'expression approchée de la force $\boldsymbol{F} = m_\mathrm{e}\omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$, où le terme d'ordre 0 est nul car $\boldsymbol{r_\mathrm{e}} = \boldsymbol{0}$ est une position d'équilibre.
Par analyse dimensionnelle, la force est homogène à une masse multipliée par une accélération, donc $\omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$ est homogène à une accélération, c'est-à-dire à une distance divisée par un temps au carré. Ainsi ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps : c'est une pulsation qui s'exprime en $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, et qui correspond à la pulsation caractéristique de vibration du nuage électronique dans le puits de potentiel créé par le noyau.
Si on assimile le noyau à une charge ponctuelle de charge totale Ze (ce qui est vrai si le noyau est sphérique, ou à grande distance du noyau), alors un ordre de grandeur de la force $\boldsymbol{F}$ est donné par la loi de Coulomb :

$$\|\boldsymbol{F}\| \simeq \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2},$$

ce qui donne l'ordre de grandeur suivant pour ω_0 :

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e} a_0^3}}. \tag{25}$$

Pour l'atome d'hydrogène, $Z = 1$, et a_0 est le rayon de Bohr $a_0 = 0{,}53$ Å, soit pour ω_0 :

$$\begin{aligned}\omega_0 &\simeq \sqrt{\frac{(1{,}6\times10^{-19})^2}{4\pi\times(8{,}85\times10^{-12})\times(9{,}1\times10^{-31})\times(5{,}3\times10^{-11})^3}}\\ &\simeq \sqrt{\frac{(1{,}6\times10^{-19})^2}{4\pi\times10^{-11}\times10^{-30}\times(5\times10^{-11})^3}}\\ &\simeq \sqrt{\frac{1{,}6^2}{4\pi\times5^3}}\times\sqrt{\frac{10^{-38}}{10^{-11}\times10^{-30}\times10^{-33}}}\\ &\simeq \sqrt{\frac{1}{4\times5^3}}\times10^{18}\end{aligned},$$

soit :

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{2^3}{4\times 10^3}} \times 10^{18} \simeq \sqrt{\frac{2}{10}} \times 10^{17} \simeq \sqrt{20} \times 10^{16} \simeq 4{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \tag{26}$$

(un calcul exact donne $\omega_0 = 4{,}1 \times 10^{16}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$). Dans le vide, cela correspond à une longueur d'onde :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \simeq \frac{2\pi \times (3\times 10^8)}{5 \times 10^{16}} \simeq \frac{6\pi}{5} \times 10^{-8} \simeq 12\pi \times 10^{-9} \simeq 40 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{nm}. \tag{27}$$

La pulsation ω_0 est donc dans l'ultraviolet.

4. En déduire l'équation différentielle qui régit le comportement de $\boldsymbol{r}_\mathbf{e}$. Commenter cette équation.

Solution: Sous l'hypothèse de la question précédente, l'équation d'évolution de la position du nuage électronique s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_\mathbf{e}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} + \frac{1}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\mathbf{e}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r}_\mathbf{e} = -\frac{e}{m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E}. \tag{28}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique amorti, forcé par le champ électrique extérieur. On remarque de plus qu'en champ nul, $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$, et on retrouve l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique amorti libre, dont la position d'équilibre est bien l'origine du repère.

5. On suppose que le champ électrique uniforme varie au cours du temps. On supposera que les lois de l'électrostatique restent valables dans ce cas. Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier la réponse du système à une excitation du typique :

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_\mathbf{0} e^{-i\omega t},$$

où ω est un nombre réel.

Solution: Le champ électrique peut de façon générale s'écrire comme une somme continue d'exponentielles oscillantes de la forme $e^{-i\omega t}$ avec un poids qui dépend de ω :

$$\boldsymbol{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \tilde{\boldsymbol{E}}(\omega) e^{-i\omega t}.$$

L'équation d'évolution de $\boldsymbol{r}_\mathbf{e}$ étant linéaire, sa solution vérifie un théorème de superposition. Pour une superposition quelconque $\boldsymbol{E}(t)$, la solution est obtenue en superposant les solutions obtenues pour chaque composante $\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)e^{-i\omega t}$. C'est pour cela qu'on peut se contenter d'une seule composante. Il suffira alors de sommer avec les bons poids à la fin.

6. Donner la solution générale de l'équation d'évolution de $\boldsymbol{r}_\mathbf{e}$. Montrer que, pour $t \gg \tau$, on a :

$$\boldsymbol{r}_\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{r}_\mathbf{0} e^{-i\omega t},$$

où $\boldsymbol{r}_\mathbf{0}$ s'exprime en fonction de $\boldsymbol{E}_\mathbf{0}$ et des données du problème. On supposera que $\omega_0\tau \gg 1$.

Solution: On doit résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. On sait que la solution générale s'écrit :

$$\boldsymbol{r}_\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{r}_\mathbf{e,h}(t) + \boldsymbol{r}_\mathbf{e,p}(t),$$

où $\boldsymbol{r}_\mathbf{e,h}(t)$ est la solution générale de l'équation différentielle homogène associée (sans second membre), et $\boldsymbol{r}_\mathbf{e,p}(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Pour trouver la solution homogène, on utilise la méthode du polynôme caractéristique : on cherche la solution sous la forme $\boldsymbol{r}_{\mathbf{e,h}}(t) \propto e^{st}$, où s vérifie l'équation :

$$s^2 + \frac{s}{\tau} + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1/\tau^2 - 4\omega_0^2 = [1 - (2\omega_0\tau)^2]/\tau^2 < 0$ (car $\omega_0\tau \gg 1$). Les deux racines sont donc :

$$s_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{i}{2\tau}\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \simeq -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0.$$

Les solutions sont donc oscillantes et exponentiellement amorties :

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{e,h}}(t) = e^{-t/(2\tau)}\left[\boldsymbol{r}_+ e^{i\omega_0 t} + \boldsymbol{r}_- e^{-i\omega_0 t}\right],$$

où $\boldsymbol{r}_\pm$ sont des vecteurs constants.
On cherche maintenant la solution particulière sous la forme :

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{e,p}}(t) = \boldsymbol{r}_{\mathbf{0}} e^{-i\omega t},$$

où $\boldsymbol{r}_{\mathbf{0}}$ est un vecteur constant. En réinjectant cette expression dans l'équation différentielle on trouve :

$$\left[-\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0^2\right]\boldsymbol{r}_{\mathbf{0}} = -\frac{e}{m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}},$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de $\boldsymbol{r}_{\mathbf{0}}$:

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{0}} = -\frac{e/m_\mathrm{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{r}_{\mathbf{e}}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{e}}(t) = e^{-t/(2\tau)}\left[\boldsymbol{r}_+ e^{i\omega_0 t} + \boldsymbol{r}_- e^{-i\omega_0 t}\right] - \frac{e/m_\mathrm{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}} e^{-i\omega t}, \tag{29}$$

où $\boldsymbol{r}_\pm$ sont des constantes. Quand $t \gg \tau$, la solution homogène décroît vers $\mathbf{0}$, et il ne reste que la solution particulière, soit :

$$\boldsymbol{r}_{\mathbf{e}}(t) = -\frac{e/m_\mathrm{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}} e^{-i\omega t}. \tag{30}$$

7. En déduire que l'atome acquiert un moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ qu'on exprimera en fonction des données dans le cas où $t \gg \tau$.

Solution: En présence d'un champ électrique, les barycentres des charges positives et négatives ne sont plus confondus, et le système acquiert un moment dipolaire :

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{Z} e\left(\boldsymbol{r}_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}\right) = Ze\boldsymbol{r}_{\mathbf{p}} - Ze\boldsymbol{r}_{\mathbf{e}},$$

où $\boldsymbol{r}_{\mathbf{p}}$ désigne la position du noyau. Or, à l'équilibre, les deux barycentres doivent être confondus, de sorte que $\boldsymbol{r}_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$. Ainsi, le moment dipolaire s'écrit :

$$\boldsymbol{p} = -Ze\boldsymbol{r}_{\mathbf{e}} = \frac{Ze^2/m_\mathrm{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}} e^{-i\omega t}. \tag{31}$$

8. En déduire la polarisabilité α de l'atome. Commenter. La mettre sous la forme $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, où α' et α'' désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de α. Que se passe-t-il quand $\omega = \omega_0$?

Solution: On peut réécrire l'expression précédente du moment dipolaire sous la forme :

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}, \tag{32}$$

où

$$\alpha = \frac{Ze^2/m_\mathrm{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}. \tag{33}$$

Cette polarisabilité peut se mettre sous la forme :

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \tag{34}$$

où

$$\begin{cases} \alpha' = \dfrac{Ze^2}{m_\mathrm{e}} \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega/\tau\right)^2} \\ \alpha'' = \dfrac{Ze^2}{m_\mathrm{e}} \dfrac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega/\tau\right)^2} \end{cases}. \tag{35}$$

On constate que α est un complexe qui dépend de la fréquence, avec une résonance quand $\omega = \omega_0$. Quand $\omega = \omega_0$, la polarisabilité est un imaginaire pur.

9. Donner l'expression, puis un ordre de grandeur de la polarisabilité statique (à pulsation nulle). Commenter, notamment la dépendance en la taille de l'atome.

Solution: La polarisabilité statique est réelle, et vaut :

$$\alpha = \frac{Ze^2}{m_\mathrm{e}\omega_0^2}. \tag{36}$$

Dans une question précédente, nous avions trouvé une estimation de ω_0 :

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{e} a_0^3}},$$

ce qui nous permet d'obtenir une estimation de α :

$$\alpha \simeq 4\pi\varepsilon_0 a_0^3. \tag{37}$$

En particulier, on voit que la polarisabilité augmente avec le volume de l'atome. Pour l'atome d'hydrogène, on a :

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq 4\pi \times \left(8{,}85 \times 10^{-12}\right) \times \left(5{,}3 \times 10^{-11}\right)^3 \\ &\simeq 4\pi \times 5^3 \times 10^{-11} \times 10^{-33} \\ &\simeq 4\pi \times \frac{10^3}{2^3} \times 10^{-44} \\ &\simeq \frac{\pi}{2} \times 10^{-41} \\ &\simeq 1{,}5 \times 10^{-41}\ \mathrm{C}^2{\cdot}\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{J}^{-1} \end{aligned} \tag{38}$$

(un calcul exact donne $\alpha = 1{,}7 \times 10^{-41}\ \mathrm{C}^2{\cdot}\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{J}^{-1}$).

10. En appliquant le théorème de la puissance mécanique, montrer qu'on peut définir une énergie mécanique

E_m du nuage électronique qui vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = P_\mathrm{dis} + P_\mathrm{dip},$$

où $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p,el}$, avec des termes qu'on explicitera.

Solution: On a vu que la position du nuage électronique vérifiait l'équation différentielle

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t^2}\right|_\mathcal{R} + \frac{1}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} + \omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}} = -\frac{e}{m_\mathrm{e}}\boldsymbol{E},$$

qui est l'équation de la dynamique pour une particule de masse m_e soumise à trois forces :

- une force de rappel élastique $\boldsymbol{F_\mathrm{el}} = -m_\mathrm{e}\omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$,
- une force électrique $\boldsymbol{F_\mathrm{elec}} = -e\boldsymbol{E}$,
- une force d'amortissement $\boldsymbol{F_\mathrm{dis}} = -\frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}$.

La première force est analogue à celle exercée par un ressort, et dérive donc d'une énergie potentielle :

$$E_\mathrm{p,el} = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\omega_0^2\boldsymbol{r_\mathrm{e}}^2. \tag{39}$$

Ainsi, l'application du théorème de la puissance mécanique dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen donne :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = P_\mathrm{dis} + P_\mathrm{dip}, \tag{40}$$

où $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p,el}$, avec

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\right)^2, \tag{41}$$

l'énergie cinétique du nuage électronique,

$$P_\mathrm{dis} = \boldsymbol{F_\mathrm{dis}}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = -\frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\right)^2, \tag{42}$$

la puissance dissipée par amortissement, et

$$P_\mathrm{dip} = -e\boldsymbol{E}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = \frac{1}{Z}\boldsymbol{E}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}, \tag{43}$$

la puissance fournie par le champ électrique.

11. Calculer, quand $t \gg \tau$, et sur une période $T = 2\pi/\omega$ du champ électrique, les valeurs moyennes de E_c, $E_\mathrm{p,el}$, E_dip (énergie moyenne fournie par le champ) et E_dis (énergie moyenne dissipée), en fonction de $\boldsymbol{E_0}$, Z, e, m_e, ω, ω_0, τ, $|\alpha|$, et α''. Commenter. On supposera que $\boldsymbol{E_0}$ est un vecteur réel.

Solution: Dans l'hypothèse où $t \gg \tau$, on a :

$$\boldsymbol{r_\mathrm{e}} = -\frac{\boldsymbol{p}}{Ze} = -\frac{\alpha}{Ze}\boldsymbol{E},$$

avec le champ électrique qui est une exponentielle oscillante. Ainsi, la dérivée première de $\boldsymbol{r_\mathrm{e}}$ est simplement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = -i\omega\boldsymbol{r_\mathrm{e}}.$$

On peut alors calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique :

$$\langle E_\mathrm{c}\rangle = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\left\langle\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{4}m_\mathrm{e}\mathrm{Re}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|^*_\mathcal{R}\right),$$

où Re désigne la partie réelle, et z^* le conjugué du complexe z. Ainsi, on obtient :

$$\langle E_\mathrm{c}\rangle = \frac{1}{4}m_\mathrm{e}\omega^2\left|\boldsymbol{r_\mathrm{e}}\right|^2 = \frac{m_\mathrm{e}\omega^2\left|\alpha\right|^2}{4\left(Ze\right)^2}\boldsymbol{E_0}^2, \tag{44}$$

où $|z|$ désigne le module du complexe z.
De la même manière, on trouve pour l'énergie potentielle élastique :

$$\langle E_\mathrm{p,el}\rangle = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\omega_0^2\left\langle\boldsymbol{r_\mathrm{e}}^2\right\rangle = \frac{1}{4}m_\mathrm{e}\omega_0^2\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{r_\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{r_\mathrm{e}}^*\right) = \frac{1}{4}m_\mathrm{e}\omega_0^2\left|\boldsymbol{r_\mathrm{e}}\right|^2 = \frac{m_\mathrm{e}\omega_0^2\left|\alpha\right|^2}{4\left(Ze\right)^2}\boldsymbol{E_0}^2. \tag{45}$$

Pour la puissance dissipée par amortissement, on a :

$$\langle P_\mathrm{dis}\rangle = -\frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\left\langle\left(\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r_\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\right)^2\right\rangle = -\frac{m_\mathrm{e}\omega^2\left|\alpha\right|^2}{2\left(Ze\right)^2\tau}\boldsymbol{E_0}^2,$$

soit pour l'énergie dissipée par amortissement :

$$\langle E_\mathrm{dis}\rangle = T\left\langle P_\mathrm{dis}\right\rangle = \frac{2\pi}{\omega}\left\langle P_\mathrm{dis}\right\rangle = -\frac{\pi m_\mathrm{e}\omega\left|\alpha\right|^2}{\left(Ze\right)^2\tau}\boldsymbol{E_0}^2. \tag{46}$$

Enfin, pour la puissance fournie par le champ, on obtient :

$$\langle P_\mathrm{dip}\rangle = \frac{1}{Z}\left\langle\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\cdot\boldsymbol{E}\right\rangle = \frac{1}{2Z}\mathrm{Re}\left(\alpha\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R}\cdot\boldsymbol{E}^*\right) = -\frac{1}{2Z}\mathrm{Re}\left(\alpha i\omega\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\right) = \frac{\alpha''\omega}{2Z}\boldsymbol{E_0}^2,$$

soit pour l'énergie moyenne reçue par le champ électrique :

$$\langle E_\mathrm{dip}\rangle = T\left\langle P_\mathrm{dip}\right\rangle = \frac{\pi\alpha''}{Z}\boldsymbol{E_0}^2. \tag{47}$$

En utilisant l'expression de α, on constate que

$$\langle E_\mathrm{dip}\rangle + \langle E_\mathrm{dis}\rangle = 0. \tag{48}$$

Autrement dit, en régime stationnaire, la puissance fournie par le champ est totalement dissipée par le rayonnement des électrons, tandis que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'échangent, avec une valeur moyenne non nulle. De plus quand $\omega = \omega_0$, les valeurs moyennes des énergies cinétique et potentielle sont égales, ce qui est une caractéristique générale de la résonance.