HMEF104 — Electromagnétisme

TD1 - Electrostatique

Le niveau des exercices est indiqué par les étoiles. Les exercices hors-programme sont notés HP.

1 Boule uniformément chargée (*)

1. Calculer le champ électrique créé par une boule uniformément chargée ρ_0 de centre O et de rayon R dans tout l'espace.

Solution: Nous allons utiliser le théorème de Gauss. Nous nous plaçons en coordonnées sphériques de centre O. La distribution de charges est invariante par rotation autour de tout axe passant par O donc on en déduit que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(r)$.
De plus, pour un point M donné, les plans $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta})$ et $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\varphi})$ sont plans de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Ainsi le champ électrique est contenu dans l'intersection de ces deux plans, soit : $\boldsymbol{E} = E(r)\boldsymbol{e_r}$.
Nous allons calculer le flux du champ électrique à travers une sphère de centre O et de rayon r : $\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r)$. D'après le théorème de Gauss, $\Phi(r) = Q_{\text{int}}(r)/\varepsilon_0$, où $Q_{\text{int}}(r)$ est la charge contenue dans la boule de centre O et de rayon r. Il y a deux cas à séparer :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{4\pi}{3} r^3 & \text{si } r \leq R \\ \rho_0 \dfrac{4\pi}{3} R^3 & \text{si } r \geq R \end{cases}.$$

On rappelle que le champ électrique est continu en $r = R$ car il n'y a pas de distribution surfacique de charges. On en déduit finalement l'expression du champ électrique :

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{e_r} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \boldsymbol{e_r} & \text{si } r \geq R \end{cases}. \tag{1}$$

2. En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace, en considérant le potentiel nul à l'infini.

Solution: On part de l'expression du champ électrique de l'égalité $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Comme $\boldsymbol{E}$ est dirigé selon $\boldsymbol{e_r}$, on en déduit que V ne dépend que de r et de plus :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ -\dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}.$$

On intègre dans les deux situations, et on trouve :

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + V_1 & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + V_2 & \text{si } r \geq R \end{cases},$$

où V_1 et V_2 sont deux constantes d'intégration.

 benjamin.guiselin@umontpellier.fr

La constante V_2 est obtenue en imposant que $V(r \to +\infty) = 0$, soit $V_2 = 0$. Quant à V_1, on utilise la continuité du potentiel en $r = R$ (il n'y a pas de charge ponctuelle ni de distribution linéique de charges). On obtient alors :

$$-\frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + V_1 = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0}.$$
$$V_1 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Nous obtenons finalement :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{si } r \geq R \end{cases}. \tag{2}$$

3. Commenter le résultat obtenu pour le champ créé en dehors de la boule.

Solution: En dehors de la boule, le champ électrique s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e_r} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

où Q_{tot} est la charge totale de la boule, et $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$. On en déduit donc que le champ électrique vu en dehors de la boule est égal à celui créé par une charge ponctuelle de charge égale à la charge totale de la boule, et située au point O.

4. (**) Montrer à partir des lois de Coulomb que le résultat de la question précédente est vrai pour toute distribution volumique de charges, de charge totale non nulle, suffisamment loin de la distribution.

Solution: Considérons une distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$ et de charge totale non nulle :

$$\iiint_{P\in\Sigma} \rho(P)\mathrm{d}V = Q_{\text{tot}} \neq 0.$$

On note alors O le centre de gravité de la distribution de charges, défini par :

$$\iiint_{P\in\Sigma} \rho(P)\boldsymbol{OP}\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}.$$

Nous considérons maintenant un point M à grande distance de la distribution, tel que $\|\boldsymbol{OM}\| \gg L$, où L désigne la taille caractéristique de la distribution. On écrit alors la loi de Coulomb pour calculer le champ électrique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(M) &= \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{PM}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3} \\ &= \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{PO}+\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3} \\ &= \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{PO}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3} + \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3}.\end{aligned}$$

Au premier ordre non nul en $L/\|\boldsymbol{OM}\|$, on peut assimiler $\|\boldsymbol{PM}\|$ dans les deux intégrales à $\|\boldsymbol{OM}\|$. Alors, le champ électrique devient :

$$\boldsymbol{E}(M) = \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{PO}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3} + \iiint_{P\in\Sigma} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3} = \boldsymbol{0} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{OM}}{\|\boldsymbol{OM}\|^3}. \tag{4}$$

On retrouve que le champ électrique à grande distance est équivalent à celui créé par une charge ponctuelle de charge égale à la charge totale de la distribution, et placée au centre de gravité de la distribution.
Attention, ce résultat devient faux si $Q_{\text{tot}} = 0$, il faut alors poursuivre le développement limité à l'ordre suivant en $L/\left\|\boldsymbol{OM}\right\|$, ce qui donne une contribution dipolaire (voir le chapitre suivant).

2 Énergie du noyau atomique (*)

On considère un noyau de numéro atomique Z qu'on assimilera à une boule uniformément chargée de rayon R.

1. Donner la densité volumique de charges ρ en fonction des données du problème et de la charge électrique élémentaire e.

Solution: La densité volumique de charges est constante et vaut :

$$\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}. \tag{5}$$

2. Par analyse dimensionnelle, donner un ordre de grandeur de l'énergie d'interaction coulombienne U du noyau. On prendra $R = 1\,\text{fm}$ et $Z = 2$. Commenter.

Solution: On sait, par le cours d'électricité, que l'énergie d'un condensateur s'écrit $Q^2/(2C)$ où Q est la charge sur l'une des armatures du condensateur et C sa capacité qui s'exprime en F dans les unités du système international. Or, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$, et donc $\varepsilon_0 R$ a la dimension d'une capacité. Ainsi, un ordre de grandeur de l'énergie d'interaction électrostatique du noyau est :

$$U = \frac{(Ze)^2}{\varepsilon_0 R} \simeq 1 \times 10^{-11}\,\text{J} = 7 \times 10^{7}\,\text{eV}. \tag{6}$$

Il s'agit d'une énergie de répulsion qui déstabilise le noyau. L'interaction forte est donc nécessaire pour maintenir la cohésion du noyau atomique.

3. Calculer la valeur exacte de U grâce au potentiel calculé à l'exercice précédent.

Solution: Dans le cours, on a vu que l'énergie d'interaction électrostatique d'une distribution volumique s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{P\in\Sigma} \rho(P)V(P)\mathrm{d}V.$$

Nous allons calculer l'intégrale précédente en coordonnées sphériques, en se servant du potentiel électrique d'une boule uniformément chargée calculé dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^R \mathrm{d}r r^2\rho V(r)\\
&= \frac{\rho}{2}\times 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^R \mathrm{d}r r^2 V(r)\\
&= \frac{\rho}{2}\times 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\int_0^R \mathrm{d}r r^2 V(r)\\
&= \frac{\rho}{2}\times 4\pi\int_0^R \mathrm{d}r r^2 V(r)
\end{aligned}.$$

Il reste à calculer l'intégrale sur la variable r, ce qui donne :

$$\begin{aligned} U &= 2\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \\ &= \frac{\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R \mathrm{d}r \left(3R^2r^2 - r^4\right) \\ &= \frac{\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[R^2r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^R \\ &= \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0} \end{aligned}.$$

En utilisant maintenant l'expression de ρ de la question précédente, on aboutit à :

$$U = \frac{3\,(Ze)^2}{20\pi\varepsilon_0 R}. \tag{7}$$

4. [HP] Retrouver le résultat de la question précédente à partir du champ électrique calculé également à l'exercice précédent.

Solution: Nous utilisons maintenant le lien entre le champ électrique et l'énergie d'interaction électrostatique obtenue dans le cours :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{M\in\text{espace}} \boldsymbol{E}^2(M)$$

On intègre là encore en coordonnées sphériques, et comme précédemment les intégrales angulaires se calculent aisément et donnent un facteur 4π. Ainsi, il reste à calculer :

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \times 4\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r r^2 \boldsymbol{E}^2(r).$$

Il faut alors découper l'intégrale entre les domaines $r < R$ et $r > R$, soit :

$$\begin{aligned} U &= 2\pi\varepsilon_0 \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 + 2\pi\varepsilon_0 \int_R^{+\infty} \mathrm{d}r r^2 \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\int_0^R \mathrm{d}r r^4 + R^6 \int_R^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right\} \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + R^6\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}\right\} \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left\{\frac{R^5}{5} + R^5\right] \end{aligned},$$

et finalement :

$$U = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}. \tag{8}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

3 Fil uniformément chargé (*)

1. Calculer le champ électrique créé par un fil infini uniformément chargé λ à partir des lois de Coulomb. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{3/2}} = 2.$$

Solution: Nous notons $\boldsymbol{e_z}$ l'axe du fil et nous nous plaçons en coordonnées cylindriques. D'après la loi de Coulomb, le champ électrique en M s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(M) = \int_{P\in\Sigma} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{PM}}{\|\boldsymbol{PM}\|^3}.$$

On note O un point quelconque du fil qui sert d'origine du repère et on note z' la position d'un point P quelconque sur le fil. Si on note (r, θ, z) les coordonnées du point M alors, on a :

$$\boldsymbol{PM} = \boldsymbol{PO} + \boldsymbol{OM} = -z'\boldsymbol{e_z} + r\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z} = r\boldsymbol{e_r} + (z-z')\boldsymbol{e_z}.$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(M) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z' \frac{r\boldsymbol{e_r} + (z-z')\boldsymbol{e_z}}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z'' \frac{r\boldsymbol{e_r} - z''\boldsymbol{e_z}}{\left(r^2+z''^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z'' \frac{r}{\left(r^2+z''^2\right)^{3/2}} \boldsymbol{e_r} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z'' \frac{z''}{\left(r^2+z''^2\right)^{3/2}} \boldsymbol{e_z}
\end{aligned},$$

la deuxième égalité étant obtenue par changement de variable $z'' = z' - z$. La seconde intégrale s'annule car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0. Nous posons alors $z'' = ru$ et le champ électrique se réécrit sous la forme :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{3/2}} \boldsymbol{e_r}.$$

L'intégrale restante peut être calculée en posant $u = \tan\alpha$. En utilisant le fait que $\mathrm{d}u = (1 + \tan^2\alpha)\mathrm{d}\alpha$, mais aussi que $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(M) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha(1+\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^{3/2}} \boldsymbol{e_r} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \boldsymbol{e_r} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \mathrm{d}\alpha \cos\alpha \boldsymbol{e_r} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} [\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \boldsymbol{e_r} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \boldsymbol{e_r}
\end{aligned}. \tag{9}$$

2. Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Gauss.

Solution: La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon ce même axe, donc en coordonnées cylindriques $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(r)$.
De plus, pour un point M quelconque, les plans $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_z})$ et $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Il est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, soit $\boldsymbol{E}(r) = E(r)\boldsymbol{e_r}$.
On considère un cylindre de même axe que le fil, de rayon r et de hauteur h. L'intégrale du champ électrique sur les bases est nul car le vecteur uitaire normal extérieur à ces surfaces est $\pm\boldsymbol{e_z}$ qui est orthogonal au champ électrique. Seul le flux latéral est non nul, qui s'écrit $\Phi(r) = 2\pi r h E(r)$. D'après le théorème de Gauss, $\Phi(r) = Q_{\text{int}}(r)/\varepsilon_0$, où $Q_{\text{int}}(r)$ est la charge intérieure au cylindre de rayon r et hauteur h qui s'écrit $Q_{\text{int}}(r) = \lambda h$. Ainsi, on obtient l'expression du champ électrique :

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e_r}. \tag{10}$$

3. Calculer le potentiel électrostatique. En déduire l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.

Solution: Le potentiel électrostatique ne dépend que de la variable r et il se calcule par la relation $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$, soit ici :

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ V(r) &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + \text{Cste} \end{aligned} \tag{11}$$

On en déduit alors que les équipotentielles sont des surfaces vérifiant $r = \text{Cste}'$, c'est-à-dire des cylindres infiniment longs de même axe que le fil. Les lignes de champ sont orthogonales, et sont donc des rayons issus du fil selon la direction $\boldsymbol{e_r}$.

4. Reprendre le calcul du champ électrique en considérant cette fois-ci que le fil est un cylindre de rayon R uniformément chargé ρ. Comparer au résultat du fil.

Solution: Dans le cas d'un cylindre, les symétries et invariances de la distribution de charges sont inchangées, donc on a toujours $\boldsymbol{E}(r) = E(r)\boldsymbol{e_r}$. Le flux se calcule de manière identique sur un cylindre de rayon r et de hauteur h, seule la charge intérieure change quand on applique le théorème de Gauss. Elle vaut maintenant :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \rho\pi r^2 h & \text{si } r \leq R \\ \rho\pi R^2 h & \text{si } r \geq R \end{cases}.$$

Ainsi, le champ électrique s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e_r} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e_r} & \text{si } r \geq R \end{cases}. \tag{12}$$

Quand $r \geq R$, on retrouve le résultat du fil infiniment fin, en posant $\lambda = \rho\pi R^2$.

4 Disque uniformément chargé (**)

1. Calculer le potentiel $V_0(z)$ et le champ électrostatiques $\boldsymbol{E_0}(z)$ créé par un disque uniformément chargé σ de rayon R sur son axe.

Solution: On calcule le potentiel électrostatique sur l'axe en utilisant les lois de Coulomb. On note O le centre du disque et P un point quelconque du disque. Alors, pour un point M à l'altitude z, on a $\boldsymbol{PM} = \boldsymbol{PO} + \boldsymbol{OM} = -r\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$ en coordonnées cylindriques. La loi de Coulomb donne alors :

$$V_0(z) = \iint_{P\in\Sigma} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{PM}\|} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\mathrm{d}r r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r r}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

la dernière égalité étant obtenue par intégration sur la variable θ. L'intégrale sur la variable r se calcule aisément et on trouve :

$$V_0(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right\}. \tag{13}$$

Pour le champ électrique, tout plan contenant l'axe du disque est plan de symétrie de la distribution de charges et donc du champ électrique. Ainsi, sur l'axe, le champ électrique est uniquement dirigé selon l'axe $\boldsymbol{e_z}$, car dans l'intersection de tous ces plans. On a donc :

$$\boldsymbol{E}_0(z) = -\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}z}(z)\boldsymbol{e_z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\}\boldsymbol{e_z}. \tag{14}$$

2. En utilisant le théorème de Gauss et la circulation du champ électrique, déterminer un développement limité du champ électrique en dehors de l'axe, pour $r \ll R$.

Solution: On considère un point $M(r,\theta,z)$ en dehors de l'axe avec $0 < r \ll R$. Le système est invariant par rotation autour de l'axe du disque donc $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r,z)$.
De plus, le plan passant par M et contenant l'axe du disque est plan de symétrie de la distribution de charges et contient donc $\boldsymbol{E}(M)$. Ainsi, on a $\boldsymbol{E}(M) = E_r(r,z)\boldsymbol{e_r} + E_z(r,z)\boldsymbol{e_z}$. On notera que quand $z=0$, alors $E_r = 0$ et $E_z = E_0$.
Nous considérons maintenant un cylindre de rayon r de même axe que le disque, entre z et $z+\mathrm{d}z$. Le flux du champ électrique s'écrit alors :

$$\mathrm{d}\Phi = \int_0^r \mathrm{d}r' 2\pi r' E_z(r', z+\mathrm{d}z) - \int_0^r \mathrm{d}r' 2\pi r' E_z(r',z) + 2\pi r\int_z^{z+\mathrm{d}z} \mathrm{d}z' E_r(r,z'),$$

les deux premiers termes correspondant aux intégrales sur les bases, le dernier à l'intégrale sur la surface latérale. En utilisant le fait que $\mathrm{d}z$ est infinitésimal, on obtient :

$$\mathrm{d}\Phi = \int_0^r \mathrm{d}r' 2\pi r'\left[E_z(r',z+\mathrm{d}z) - E_z(r',z)\right] + 2\pi r \mathrm{d}z E_r(r,z) = 2\pi \mathrm{d}z\left\{\int_0^r \mathrm{d}r' r' \frac{\partial E_z}{\partial z}(r',z) + rE_r(r,z)\right\}.$$

D'après le théorème de Gauss, ce flux est nul car il n'y a pas de charges en dehors du disque, et on obtient finalement :

$$\int_0^r \mathrm{d}r' r' \frac{\partial E_z}{\partial z}(r',z) + rE_r(r,z) = 0. \tag{15}$$

Pour obtenir une seconde équation liant E_r et E_z, on calcule la circulation sur un rectangle fermé entre les points $(0, z+\mathrm{d}z)$, $(r, z+\mathrm{d}z)$, (r,z) et $(0,z)$. Cette circulation est nulle d'une part car le champ électrique est à circulation conservative. D'autre part, elle vaut :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{C} &= \int_0^r E_r(r', z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}r' - \int_z^{z+\mathrm{d}z} E_z(r,z')\mathrm{d}z' - \int_0^r E_r(r',z)\mathrm{d}r' + \int_z^{z+\mathrm{d}z} E_z(0,z')\mathrm{d}z' \\ &= \int_0^r \mathrm{d}r'\left[E_r(r',z+\mathrm{d}z) - E_r(r',z)\right] - \int_z^{z+\mathrm{d}z} \mathrm{d}z'\left[E_z(r,z') - E_z(0,z')\right].\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau que $\mathrm{d}z$ est infinitésimal, on obtient :

$$\mathrm{d}\mathcal{C} = \mathrm{d}z\left\{\int_0^r \mathrm{d}r' \frac{\partial E_r}{\partial z}(r',z) - \left[E_z(r,z) - E_z(0,z)\right]\right\} = 0,$$

soit :

$$E_z(r,z) = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{\partial E_r}{\partial z}(r',z) + E_0(z). \tag{16}$$

La dérivée de cette équation par rapport à z donne alors :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}(r,z) = \int_0^r \mathrm{d}r' \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2}(r',z) + \frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}(z),$$

ce qu'on peut réinjecter dans l'Éq. (15), soit :

$$\int_0^r \mathrm{d}r' r' \left[\int_0^{r'} \mathrm{d}r'' \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2}(r'',z) + \frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}(z)\right] + rE_r(r,z) = 0$$
$$\int_0^r \mathrm{d}r' r' \int_0^{r'} \mathrm{d}r'' \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2}(r'',z) + \frac{1}{2}r^2 \frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}(z) + rE_r(r,z) = 0.$$

Le premier terme est au moins d'ordre 3 en r/R alors que le second est d'ordre 2, et peut donc être négligé. On obtient finalement, au plus petit ordre non nul en r/R :

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z}(z), \tag{17}$$

et en utilisant l'Éq. (16) :

$$E_z(r,z) = E_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}z^2}(z). \tag{18}$$

3. En déduire l'allure des lignes de champ et des équipotentielles proches de l'axe.

Solution: Il existe tout d'abord une ligne de champ qui est l'axe (Oz). De plus, proche de l'axe, on a $E_r > 0$, donc les lignes de champ sont légèrement divergentes de l'axe. Les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

5 Plan infini uniformément chargé (*)

1. Calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé σ.

Solution: Nous allons appliquer le théorème de Gauss. Considérons un point M quelconque, et notons $\boldsymbol{e_z}$ un vecteur unitaire normal au plan. La distribution est invariante par translation selon les vecteurs $\boldsymbol{e_x}$ et $\boldsymbol{e_y}$, donc $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(z)$.
De plus les deux plans orthogonaux à la nappe de charges passant par M sont plans de symétrie de la distribution. Le champ électrique est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, soit $\boldsymbol{E}(z) = E(z)\boldsymbol{e_z}$. Enfin, le plan de charges est lui-même plan de symétrie de la distribution et donc du champ électrique. On en déduit donc que $\boldsymbol{E}(-z) = -\boldsymbol{E}(z)$, donc que la fonction $E(z)$ est impaire.
On considère un cylindre de base S compris entre les altitudes $-z$ et z. Le flux latéral est nul car $\boldsymbol{E}$ est dirigé selon $\boldsymbol{e_z}$. Le flux à travers le cylindre est donc la somme des flux sur les deux bases, qui s'ecrit donc, pour $z > 0$:

$$\Phi(z) = SE(z) - SE(-z) = 2E(z)S,$$

par imparité de $E(z)$.

Le théorème de Gauss indique alors que $\Phi(z) = Q_{\text{int}}(z)/\varepsilon_0 = \sigma S/\varepsilon_0$. On en déduit alors que :

$$\boldsymbol{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z} & \text{si } z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z} & \text{si } z < 0 \end{cases}. \tag{19}$$

2. Retrouver la relation de passage pour le champ électrique.

Solution: On trouve que le champ électrique est discontinu au niveau de la nappe de charges, en $z = 0$. La discontinuité s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(0^+) - \boldsymbol{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z}, \tag{20}$$

qui est bien ce qu'on attend par la relation de passage.

6 Champ gravitationnel dans une cavité (*)

1. Calculer le champ gravitationnel dans une cavité sphérique de centre O' dans une boule de masse uniforme ρ_{m} de centre O et de rayon R.

Solution: Nous allons utiliser une analogie avec l'électrostatique. Considérons le cas électrostatique tout d'abord. On peut voir la présence d'une cavité comme due à la présence d'une densité volumique de charges $-\rho$ dans la boule de centre O', dans une boule de densité volumique $+\rho$ de centre O. Ainsi, dans la cavité, la charge totale est nulle. Le champ électrique total s'obtient par superposition des champs créés par les deux boules. Or, nous avons vu dans le premier exercice que le champ électrique créé en un point M intérieur à la boule chargée uniformément ρ_0 est donné par :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{OM}.$$

Ainsi, le champ électrique total s'écrit, dans la cavité :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{OM} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{O'M} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{OO'}.$$

On transpose le résultat à la gravitation, et on obtient :

$$\boldsymbol{g}(M) = \frac{4\pi}{3}\mathscr{G}\rho_{\text{m}}\boldsymbol{O'O}, \tag{21}$$

uniforme dans la cavité.

7 Sphères chargées proches (**)

1. Calculer en un point M tel que $\boldsymbol{OM} = z\boldsymbol{e_z}$ le champ électrique et le potentiel électrostatique créés par une sphère de centre O et de rayon R de densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ où θ est l'angle des coordonnées sphériques de centre O et d'axe $\boldsymbol{e_z}$.

Solution: On utilise la formule de Coulomb pour le potentiel :

$$V(z) = \iint_{P\in\Sigma} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0 \|\boldsymbol{PM}\|}\mathrm{d}S.$$

Ici, on doit intégrer sur les angles θ et φ en coordonnées sphériques, et $\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$. De plus, on a :

$$\boldsymbol{PM} = \boldsymbol{PO} + \boldsymbol{OM} = -R\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}$$
$$\|\boldsymbol{PM}\| = \|-R\boldsymbol{e_r} + z\boldsymbol{e_z}\| = \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}.$$

Pour le potentiel, cela donne :

$$V(z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta \frac{R^2\sigma_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} = \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}},$$

la dernière égalité étant obtenue par intégration sur la variable φ. Pour le calcul de la seconde intégrale, on effectue le changement de variable $u = \cos\theta$ ($\mathrm{d}u = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$), puis on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
V(z) &= \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \frac{u}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}} \\
&= \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}\left\{\left[-\frac{u}{Rz}\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{Rz}\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}\right\} \\
&= \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{u}{Rz}\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu} - \frac{1}{3\left(Rz\right)^2}\left(R^2 + z^2 - 2Rzu\right)^{3/2}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{\sigma_0 R^2}{6\varepsilon_0\left(Rz\right)^2}\left[\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}\left(Rzu + R^2 + z^2\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 z^2}\left[\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz}\left(R^2 + z^2 + Rz\right) - \sqrt{R^2 + z^2 + 2Rz}\left(R^2 + z^2 - Rz\right)\right] \\
&= -\frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 z^2}\left[|R - z|\left(R^2 + z^2 + Rz\right) - |R + z|\left(R^2 + z^2 - Rz\right)\right] \\
&= -\frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 z^2}\left[\left(R^2 + z^2\right)\left(|R - z| - |R + z|\right) + Rz\left(|R - z| + |R + z|\right)\right].
\end{aligned}$$

Il faut alors distinguer plusieurs cas, selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère, ce qui donne finalement :

$$V(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 z^2} & \text{si } z \geq R \\ \dfrac{\sigma_0 z}{3\varepsilon_0} & \text{si } -R \leq z \leq R \\ -\dfrac{\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 z^2} & \text{si } z \leq -R \end{cases}. \tag{22}$$

Pour le calcul du champ électrique, tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique, qui est donc contenu dans l'intersection de tous ces plans. Ainsi, sur l'axe, on a :

$$\boldsymbol{E}(z) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)\boldsymbol{e_z} = \begin{cases} \dfrac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 z^3}\boldsymbol{e_z} & \text{si } z \geq R \\ -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z} & \text{si } -R \leq z \leq R \\ -\dfrac{2\sigma_0 R^3}{3\varepsilon_0 z^3}\boldsymbol{e_z} & \text{si } z \leq -R \end{cases}. \tag{23}$$

2. Montrer que le champ électrique obtenu est équivalent à celui créé par deux boules de charges uniformes

et opposées, séparées d'une distance $a \ll R$ selon l'axe $\boldsymbol{e_z}$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Solution: Considérons deux boules chargées $\pm\rho_0$ et dont les centres O et O' vérifient $\boldsymbol{OO'} = a\boldsymbol{e_z}$. On note O'' le milieu de O et O', qu'on choisit comme origine du système de coordonnées sphériques. On souhaite connaître la distribution de charges, et pour cela on doit calculer $\|\boldsymbol{OM}\|$ et $\|\boldsymbol{O'M}\|$. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{OM}\| = \|\boldsymbol{OO''} + \boldsymbol{O''M}\| = \left\|\frac{a}{2}\boldsymbol{e_z} + r\boldsymbol{e_r}\right\| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 + ar\cos\theta} \\ \|\boldsymbol{O'M}\| = \|\boldsymbol{O'O''} + \boldsymbol{O''M}\| = \left\|-\frac{a}{2}\boldsymbol{e_z} + r\boldsymbol{e_r}\right\| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar\cos\theta}\end{aligned}.$$

Pour la boule de centre O, par exemple, on sait que la densité volumique de charges vaut $-\rho_0$ si $\|\boldsymbol{OM}\| \leq R$ et 0 sinon. On cherche donc à savoir quand $\|\boldsymbol{OM}\| = R$. Cela donne une équation du second degré sur la variable r à résoudre :

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 + ar\cos\theta} = R \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 + ar\cos\theta = R^2 \cdot \\ r^2 + ar\cos\theta - R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = (a\cos\theta)^2 + 4R^2 - a^2 = 4\left(R^2 - (a\cos\theta/2)^2\right)$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$r_\pm(\theta) = -\frac{a}{2}\cos\theta \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2},$$

dont seule la solution positive $r_+(\theta)$ est à garder. De la même manière pour $\|\boldsymbol{O'M}\|$, on trouve l'équation :

$$r'_\pm(\theta) = \frac{a}{2}\cos\theta \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2},$$

dont on ne garde que la solution positive. On en déduit alors que :

$$\rho(r,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < \min(r_+(\theta), r'_+(\theta)) \\ \pm\rho_0 & \text{si } \min(r_+(\theta), r'_+(\theta)) < r < \max(r_+(\theta), r'_+(\theta)) \\ 0 & \text{si } r > \max(r_+(\theta), r'_+(\theta)) \end{cases},$$

où le signe est $+$ si $r'_+(\theta) > r_+(\theta)$ et $-$ sinon, l'égalité étant obtenue pour $\theta = \pm\pi/2$. Ainsi si $|\theta| < \pi/2$, on a $r'_+(\theta) > r_+(\theta)$ et finalement :

$$\rho(r,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < \min(r_+(\theta), r'_+(\theta)) \\ \rho_0 & \text{si } r_+(\theta) < r < r'_+(\theta) \text{ et } |\theta| < \pi/2 \\ -\rho_0 & \text{si } r'_+(\theta) < r < r_+(\theta) \text{ et } |\theta| > \pi/2 \\ 0 & \text{si } r > \max(r_+(\theta), r'_+(\theta)) \end{cases}.$$

Or l'écart radial de la zone où $\rho(r,\theta)$ est non nulle vaut $a\,|\cos\theta| \ll R$. On peut donc modéliser cette distribution par une distribution surfacique, c'est-à-dire l'assimiler à une sphère de centre O'' et de rayon R dont la densité surfacique vaut :

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{r_+(\theta)}^{r'_+(\theta)} \rho_0 \mathrm{d}r = \rho_0 \left[r'_+(\theta) - r_+(\theta)\right] & \text{si } |\theta| < \pi/2 \\ \displaystyle\int_{r'_+(\theta)}^{r_+(\theta)} (-\rho_0)\,\mathrm{d}r = \rho_0 \left[r'_+(\theta) - r_+(\theta)\right] & \text{si } |\theta| > \pi/2 \end{cases} \\ &= \rho_0 \left[r'_+(\theta) - r_+(\theta)\right] \\ &= \rho_0 R \left[\frac{a}{2R}\cos\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\cos\theta\right)^2} - \left(-\frac{a}{2R}\cos\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\cos\theta\right)^2}\right)\right] \\ &= \rho_0 a \cos\theta. \end{aligned} \tag{24}$$

On retrouve donc bien la distribution surfacique de la question précédente, en posant $\sigma_0 = \rho_0 a$. On peut donc calculer le champ électrique comme la superposition des champs créés par chacune des deux boules. À l'intérieur des deux boules, le champ s'écrit :

$$\boldsymbol{E}(M) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{O'M} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{OM} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{O'O} = -\frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e_z}, \tag{25}$$

indépendamment du point M (ce qui signifie que le champ calculé précédemment sur l'axe est en réalité le même partout dans le volume délimité par la sphère).
En dehors des deux boules, le champ est dipolaire (voir le chapitre suivant).

8 Distribution non uniforme (*)

1. Calculer le champ électrique dans tout l'espace créé par une boule de rayon R, de centre O et de densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0\,(1 - r/R)$.

Solution: On applique le théorème de Gauss. La distribution est invariante par rotation autour de tout axe passant par O, donc en coordonnées sphériques, on a : $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r)$.
Pour un point M quelconque, les plans $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta})$ et $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\varphi})$ sont plans de symétrie de la distribution et donc du champ électrique. Le champ est donc compris dans leur intersection, soit $\boldsymbol{E}(M) = E(r)\boldsymbol{e_r}$.
On calcule le flux du champ électrique à travers une sphère de rayon r : $\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r)$. D'après le théorème de Gauss, $\Phi(r) = Q_{\text{int}}(r)/\varepsilon_0$ où la charge intérieure $Q_{\text{int}}(r)$ est obtenue en intégrant la distribution de charges :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\mathrm{d}r' & \text{si } r \leq R \\ \displaystyle\int_0^R 4\pi r'^2 \rho(r')\mathrm{d}r' & \text{si } r \geq R \end{cases}.$$

Après intégration, on aboutit à :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\rho_0}{3} r^3 \left[1 - \dfrac{3r}{4R}\right] & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\pi\rho_0}{3} R^3 & \text{si } r \geq R \end{cases}.$$

Finalement, nous obtenons l'expression du champ électrique

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{3r}{4R}\right]\boldsymbol{e_r} & \text{si } r \leq R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e_r} & \text{si } r \geq R \end{cases}. \tag{26}$$

9 Modèle de l'atome (**)

On considère un atome de numéro atomique Z représenté par la superposition de deux répartitions : une sphère uniformément chargée en volume de rayon a et de centre O pour le noyau, et une répartition volumique de charges extérieure au noyau définie si r est la distance au centre O par $\rho(r) = Ar^{-n}$ pour $r \geq a$, où A et n sont des constantes.

1. Donner une condition sur n, puis calculer A en fonction de n, Z, la charge électrique élémentaire e et a.

Solution: On calcule la charge négative totale de la distribution $\rho(r)$:

$$Q = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}r 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi A \int_a^{+\infty} r^{2-n} = 4\pi A \left[\frac{r^{3-n}}{3-n}\right]_a^{+\infty}.$$

Pour que l'intégrale converge en $r = +\infty$, il faut que $3 - n < -1$, soit $n > 4$. Dans ce cas, la charge totale vaut $Q = 4\pi A a^{3-n}/(n-3)$. Par électroneutralité, cette charge doit être l'opposée de celle du noyau, soit $Q = -Ze$. On aboutit donc à :

$$A = -(n-3)\frac{Ze}{4\pi}a^{n-3}. \tag{27}$$

2. Calculez le champ électrique et le potentiel électrostatique en tout point de l'espace.

Solution: On utilise le théorème de Gauss. Les invariances de la distribution de charges par toute rotation d'axe passant par le centre du noyau impliquent que $\boldsymbol{E}(M) = \boldsymbol{E}(r)$.
De plus, pour un point M quelconque, les plans $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta})$ et $(M, \boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\varphi})$ sont plans de symétrie de la distribution et donc du champ électrique. Le champ est donc compris dans leur intersection, soit $\boldsymbol{E}(M) = E(r)\boldsymbol{e_r}$.
On calcule le flux du champ électrique sur une sphère de rayon r : $\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r)$. D'après le théorème de Gauss, $\Phi(r) = Q_{\text{int}}(r)/\varepsilon_0$, où la charge intérieure dépend de r selon :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\rho_0}{3} r^3 & \text{si } r \leq a \\ Ze + \displaystyle\int_a^r 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' \rho(r') & \text{si } r \geq a \end{cases},$$

où on a noté ρ_0 la densité volumique de charges dans le noyau : $\rho_0 \times (4\pi/3)a^3 = Ze$. Par intégration élémentaire, on obtient :

$$Q_{\text{int}}(r) = \begin{cases} Ze\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & \text{si } r \leq a \\ Ze\left(\dfrac{a}{r}\right)^{n-3} & \text{si } r \geq a \end{cases},$$

ce qui donne pour le champ électrique :

$$\boldsymbol{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{r}{a^3}\boldsymbol{e_r} & \text{si } r \leq a \\ \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{r}{a^3} \times \left(\dfrac{a}{r}\right)^n \boldsymbol{e_r} & \text{si } r \geq a \end{cases}. \tag{28}$$

Pour le calcul du potentiel électrostatique, on utilise sa relation avec le champ électrique : $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$. D'après l'expression du champ électrique précédente, on en déduit déjà que $V(M) = V(r)$ en coordonnées sphériques. De plus, pour $r \leq a$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{r}{a^3},$$

soit en intégrant :
$$V(r) = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{r^2}{2a^3} + V_1,$$
où V_1 est une constante d'intégration. De la même manière, quand $r \geq a$, on a :
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{r}{a^3} \times \left(\frac{a}{r}\right)^n = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a^{3-n}} r^{1-n},$$
soit en intégrant :
$$V(r) = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a^{3-n}} \frac{r^{2-n}}{2-n} + V_2,$$
où V_2 est une seconde constante d'intégration. Quand $r \to +\infty$, $V(r)$ tend vers V_2 (car $n > 4$). Si on impose la nullité du potentiel à l'infini, on obtient $V_2 = 0$. La constante V_1 est obtenu par continuité du potentiel en $r = a$ (car il n'y a pas de distribution linéique de charges), soit :
$$\begin{aligned} -\frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 a} + V_1 &= -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a(2-n)} \\ V_1 &= -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a(2-n)} + \frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 a} \\ V_1 &= \frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{2}{2-n}\right) \\ V_1 &= \frac{n}{n-2}\frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}.$$
Ainsi, on obtient finalement pour le potentiel :
$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{n}{n-2} - \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right) & \text{si } r \leq a \\ \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 a(n-2)}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{n-2} & \text{si } r \geq a \end{cases}. \tag{29}$$

10 Théorème d'Earnshaw (**)

1. Montrer qu'il n'existe pas d'extremum du potentiel électrique dans une région de l'espace vide de charges.

Solution: Considérons une région de l'espace vide de charges, et imaginons que le potentiel présente un extremum en un point M. Comme le potentiel décroît le long des lignes du champ électrique, cela signifie que suffisamment proche de M, toutes les lignes de champ divergent (si c'est un maximum) ou convergent (si c'est un minimum). Considérons maintenant une boule centrée sur M et de rayon suffisamment petit. Le flux du champ électrique à travers cette boule est donc non nul, strictement positif si $V(M)$ est maximum, et strictement négatif sinon. Or d'après le théorème de Gauss, ce flux est nul car il n'y a pas de charges dans l'espace. On aboutit donc à une contradiction, et l'existence d'un extremum est exclu.

2. En déduire qu'une distribution discrète de charges ponctuelles n'est pas stable.

Solution: Considérons une distribution discrète de charges ponctuelles, et isolons une charge q au point M. Pour que la distribution soit stable, le point M doit correspondre à un minimum de l'énergie potentielle de la charge. Cette énergie potentielle s'écrit $qV(M)$ où $V(M)$ est le potentiel créé par les autres charges en M, quand la charge q est absente. D'après la question précédente, ce potentiel ne peut pas avoir d'extremum en M, et donc l'énergie potentielle ne peut être minimale.

11 Potentiel électrostatique dans un plasma [HP] (***)

1. On s'intéresse à un plasma électriquement neutre à une dimension dans le vide, constitué de charges positives de charge $+e$ et de charges négatives de charge $-e$. Il occupe le demi-espace $z > 0$. On souhaite calculer le potentiel $V(z)$, ainsi que les distributions $\rho_\pm(z)$ de charges positives et négatives. Rappeler l'équation de Poisson, reliant le potentiel à la distribution de charges.

Solution: L'équation de Poisson s'écrit :

$$\mathbf{\Delta} V(z) = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2}(z) = -\frac{\rho_+(z) + \rho_-(z)}{\varepsilon_0} \tag{30}$$

2. On suppose que les particules se répartissent dans l'espace selon une distribution de Boltzmann à la température T. En déduire une seconde relation entre les distributions de charges et le potentiel. On prendra le potentiel nul à l'infini.

Solution: L'énergie d'une particule chargée dans un potentiel s'écrit $E_{\mathrm{p,e}} = qV$, avec q la charge de la particule. On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \rho_+(z) = \rho_0^{(+)} \exp\left(-\dfrac{eV(z)}{k_B T}\right) \\ \rho_-(z) = \rho_0^{(-)} \exp\left(\dfrac{eV(z)}{k_B T}\right) \end{cases},$$

où k_B est la constante de Boltzmann, et $\rho_0^{(\pm)}$ sont des préfacteurs. Le potentiel étant pris nul à l'infini, on a, $\rho_\pm(z \to +\infty) = \rho_0^{(\pm)}$, ce qui impose par électroneutralité, que les deux préfacteurs soient opposés. Ainsi,

$$\begin{cases} \rho_+(z) = \rho_0 \exp\left(-\dfrac{eV(z)}{k_B T}\right) \\ \rho_-(z) = -\rho_0 \exp\left(\dfrac{eV(z)}{k_B T}\right) \end{cases}, \tag{31}$$

3. On note n_0 la densité volumique de particules chargées positivement. Donner une équation vérifiée par $V(z)$.

Solution: On utilise les résultats des deux questions précédentes :

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2}(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\exp\left(\frac{eV(z)}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{eV(z)}{k_B T}\right)\right].$$

Or $\rho_0 = n_0 e$, d'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2}(z) &= \frac{n_0 e}{\varepsilon_0}\left[\exp\left(\frac{eV(z)}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{eV(z)}{k_B T}\right)\right] \\ \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2}(z) &= \frac{2n_0 e}{\varepsilon_0}\sinh\left(\frac{eV(z)}{k_B T}\right) \end{aligned}. \tag{32}$$

4. Trouver une intégrale première de l'équation précédente. On prendra le champ électrique nul à l'infini.

Solution: On multiplie l'équation précédente par la dérivée première de $V(z)$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}(z) \times \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{2n_0e}{\varepsilon_0}\sinh\left(\frac{eV(z)}{k_BT}\right) \times \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z),$$

puis on intègre membre à membre, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)\right)^2 = \frac{2n_0k_BT}{\varepsilon_0}\cosh\left(\frac{eV(z)}{k_BT}\right) + \mathrm{Cste}.$$

Le champ électrique et le potentiel étant nuls à l'infini, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z \to +\infty) = 0 \\ V(z \to +\infty) = 0 \end{cases},$$

ce qui donne en réinjectant dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2n_0k_BT}{\varepsilon_0} + \mathrm{Cste} \\ -\frac{2n_0k_BT}{\varepsilon_0} &= \mathrm{Cste} \end{aligned},$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)\right)^2 &= \frac{4n_0k_BT}{\varepsilon_0}\left[\cosh\left(\frac{eV(z)}{k_BT}\right) - 1\right] \\ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)\right)^2 &= \frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}\sinh^2\left(\frac{eV(z)}{2k_BT}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

où nous avons utilisé l'identité $\cosh x - 1 = 2\sinh^2(x/2)$.

5. Trouver l'expression du potentiel et des distributions de charges. On rappelle qu'une primitive de $x \to 1/\sinh x$ est $x \to \ln[\tanh(x/2)]$. On notera également V_0 le potentiel en $z = 0$.

Solution: On repart de l'équation précédente, et on en prend la racine carrée, soit :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z) = \pm\sqrt{\frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}}\sinh\left(\frac{eV(z)}{2k_BT}\right).$$

On procède ensuite par séparation des variables, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\sinh\left(\dfrac{eV}{2k_BT}\right)} &= \pm\sqrt{\frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}}\mathrm{d}z \\ \int_{V_0}^{V(z)} \frac{\mathrm{d}V}{\sinh\left(\dfrac{eV}{2k_BT}\right)} &= \pm\sqrt{\frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}}\int_0^z \mathrm{d}z'. \end{aligned}$$

On procède par changement de variable $u = eV/(2k_BT)$, d'où :

$$\frac{2k_BT}{e}\int_{\frac{eV_0}{2k_BT}}^{\frac{eV(z)}{2k_BT}} \frac{\mathrm{d}u}{\sinh u} = \pm\sqrt{\frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}}\int_0^z \mathrm{d}z'.$$

On peut alors intégrer membre à membre pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{2k_BT}{e}\left\{\ln\left[\tanh\left(\frac{eV(z)}{4k_BT}\right)\right]-\ln\left[\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\right]\right\}&=\pm\sqrt{\frac{8n_0k_BT}{\varepsilon_0}}z\\ \ln\left[\tanh\left(\frac{eV(z)}{4k_BT}\right)\right]&=\pm\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z+\ln\left[\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\right]\end{aligned}.$$

Qand $z\to+\infty$, le membre de gauche tend vers $-\infty$. On en déduit donc que c'est la solution avec un $-$ qu'il faut garder, soit :

$$\ln\left[\tanh\left(\frac{eV(z)}{4k_BT}\right)\right]=-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z+\ln\left[\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\right].$$

Il faut maintenant isoler le potentiel $V(z)$, soit :

$$\tanh\left(\frac{eV(z)}{4k_BT}\right)=\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right).$$

Il faut maintenant trouver la réciproque de la fonction $x\to\tanh x$:

$$\begin{aligned}\tanh x=y&\Longleftrightarrow\frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}=y\\ &\Longleftrightarrow\exp(2x)-1=y\left[\exp(2x)+1\right],\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\end{aligned}$$

d'où pour le potentiel :

$$\begin{aligned}\frac{eV(z)}{4k_BT}&=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1-\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}\\ V(z)&=\frac{2k_BT}{e}\ln\frac{1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1-\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}\end{aligned}. \tag{34}$$

On obtient alors les distributions $\rho_\pm(z)$ par la relation de Boltzmann :

$$\rho_+(z)=n_0e\left(\frac{1-\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}\right)^2, \tag{35}$$

$$\rho_-(z)=-n_0e\left(\frac{1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1-\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}\right)^2. \tag{36}$$

6. Simplifier l'expression du potentiel $V(z)$ à grande distance. Pour cela, on comparera z à une distance caractéristique λ_D. Commenter.

Solution: Dans l'hypothèse où $\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z \gg 1$, soit $z \gg \lambda_D$, où

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_BT\varepsilon_0}{2n_0e^2}}. \tag{37}$$

Dans ce cas, $\exp(-z/\lambda_D)$ est très petit devant 1, et on peut faire un développement limité :

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{2k_BT}{e}\ln\left[\left(1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)\right)^2\right] \\ &= \frac{4k_BT}{e}\ln\left[1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)\right] \\ &= \frac{4k_BT}{e}\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right) \\ &= \frac{4k_BT}{e}\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\frac{z}{\lambda_D}\right) \end{aligned}. \tag{38}$$

Le potentiel décroit donc de manière exponentielle, sur une distance caractéristique λ_D (longueur d'écrantage dite de Debye).

7. Simplifier l'expression du potentiel à toute distance, dans l'hypothèse où les fluctuations thermiques sont grandes : $eV_0 \ll k_BT$. Commenter.

Solution: Dans ce cas, on peut simplifier l'expression du potentiel en linéarisant la tangente hyperbolique, puis en faisant un développement limité de l'argument du logarithme, puis du logarithme lui-même :

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{2k_BT}{e}\ln\frac{1+\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1-\tanh\left(\frac{eV_0}{4k_BT}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)} \\ &= \frac{2k_BT}{e}\ln\frac{1+\frac{eV_0}{4k_BT}\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)}{1-\frac{eV_0}{4k_BT}\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)} \\ &= \frac{4k_BT}{e}\ln\left[1+\frac{eV_0}{4k_BT}\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right)\right] \\ &= \frac{4k_BT}{e}\times\frac{eV_0}{4k_BT}\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right) \\ &= V_0\exp\left(-\sqrt{\frac{2n_0e^2}{k_BT\varepsilon_0}}z\right) = V_0\exp\left(-\frac{z}{\lambda_D}\right) \end{aligned}. \tag{39}$$

On trouve alors une décroissance exponentielle sur la distance caractéristique λ_D, depuis $z = 0$.