OUTILS MATHÉMATIQUES (2 HEURES)

Les notes <u>de cours</u> sont le seul document autorisé. Les calculatrices, ordinateurs, tablettes, téléphones, ou tout autre appareil électronique, sont interdits.

Quelques conseils généraux :

1. *L'énoncé est volontairement long, il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour réussir.*
2. *Toute réponse doit être justifiée.*
3. *Les différents exercices sont indépendants, et il y a beaucoup de questions indépendantes au sein même de chaque exercice.*
4. *Le soin apporté à la copie, ainsi que l'orthographe, seront pris en compte dans la notation.*

I. Fonction de Green et résolution d'une équation différentielle

On souhaite résoudre l'équation différentielle (pour $s \in \mathbb{R}^{+*}$)

$$f''(x) - s^2 f(x) = g(x), \tag{1}$$

d'inconnue $f(x)$. On a vu en cours une manière de résoudre cette équation en utilisant la méthode de variation des deux constantes. On propose une autre méthode, qui s'appuie sur la distribution de Dirac, et qui consiste à résoudre dans un premier temps l'équation différentielle

$$f_\delta''(x) - s^2 f_\delta(x) = \delta(x), \tag{2}$$

où f_δ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

I.A. Résoudre l'Éq. (2) en séparant les cas $x < 0$ et $x > 0$.

Solution :
Pour $x < 0$ et $x > 0$, on doit résoudre $f_\delta''(x) - s^2 f_\delta(x) = 0$. On en déduit alors que

$$f_\delta(x) = \begin{cases} Ae^{sx} + A'e^{-sx}, & x < 0, \\ Be^{-sx} + B'e^{sx}, & x > 0, \end{cases}$$

avec A, A', B et B' quatre constantes d'intégration. On impose que f_δ tende vers 0 quand $x \to \pm\infty$. On en déduit alors que $A' = B' = 0$.

I.B. Justifier qu'on peut choisir f_δ paire. On fera ce choix dans les questions qui suivent.

Solution :
Si f_δ est solution, on considère la fonction $h : x \mapsto f_\delta(-x)$. On a alors que $h''(x) = f_\delta''(-x)$, et finalement

$$h''(x) - s^2 h(x) = f_\delta''(-x) - s^2 f_\delta(-x) = \delta(-x) = \delta(x),$$

car δ est paire. En d'autres termes, si f_δ est solution $x \mapsto f_\delta(-x)$ l'est aussi. Par linéarité de l'équation, la fonction $x \mapsto [f_\delta(x) + f_\delta(-x)]/2$ est également solution, et cette fonction est paire.

I.C. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta(x) = -1/s^2$.

Solution :
Pour cette question, on fait comme si f_δ était une fonction ayant des propriétés de régularité

suffisantes. On intègre alors l'Éq. (2) sur $\mathbb{R}$, et on obtient

$$f_\delta'(+\infty) - f_\delta'(-\infty) - s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1.$$

Or $f_\delta'(\pm\infty) = 0$, d'où le résultat demandé.

I.D. En déduire que

$$f_\delta(x) = -\frac{1}{2s} e^{-s|x|}.$$

Solution :
Il suffit d'appliquer la condition précédente à $f_\delta(x) = Ae^{-s|x|}$. On trouve alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta(x) = 2A \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx} = \frac{2A}{s}.$$

On obtient alors le résultat demandé par l'énoncé.

I.E. On se propose de vérifier que f_δ vérifie bien l'Éq. (2). Pour cela, il faut calculer sa dérivée seconde au sens des distributions. Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta''(x)\varphi(x),$$

où φ est une fonction test (c'est-à-dire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support borné), et en déduire que f_δ vérifie bien l'Éq. (2).

Solution :
On procède comme indiqué par l'énoncé en multipliant par une fonction test et en intégrant. Après une double intégration par parties (la fonction test étant à support borné), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta''(x)\varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta(x)\varphi''(x), \\
&= -\frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi''(x) - \frac{1}{2s}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx}\varphi''(x).
\end{aligned}$$

On procède alors en intégrant par parties deux fois chacune des deux intégrales. On trouve alors, pour la première intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi''(x) &= \left[\varphi'(x)e^{sx}\right]_{-\infty}^{0} - s\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi''(x), \\
&= \left[\varphi'(x)e^{sx}\right]_{-\infty}^{0} - s\left[\varphi(x)e^{sx}\right]_{-\infty}^{0} + s^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi(x), \\
&= \varphi'(0) - s\varphi(0) + s^2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi(x).
\end{aligned}$$

On procède pareillement pour la seconde intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx}\varphi''(x) &= \left[\varphi'(x)e^{-sx}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx}\varphi''(x), \\
&= \left[\varphi'(x)e^{-sx}\right]_0^{+\infty} + s\left[\varphi(x)e^{-sx}\right]_0^{+\infty} + s^2\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx}\varphi(x), \\
&= -\varphi'(0) - s\varphi(0) + s^2\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-sx}\varphi(x).
\end{aligned}$$

En combinant les deux résultats obtenus, on obtient finalement que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f_\delta''(x)\varphi(x) &= \varphi(0) + s^2\left[-\frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi(x) - \frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\, e^{sx}\varphi(x)\right], \\ &= \varphi(0) + s^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\, f_\delta(x)\varphi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\delta(x)\varphi(x) + s^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\, f_\delta(x)\varphi(x).\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour toute fonction test φ, on en conclut que

$$f_\delta''(x) = \delta(x) + s^2 f_\delta(x),$$

et donc que f_δ vérifie bien l'Éq. (2).

I.F. On souhaite maintenant résoudre l'Éq. (1) pour $g(x) = \cos(qx)$ (pour $q \in \mathbb{R}$). Justifier qu'une solution f se met sous la forme $f = f_\delta * g$, où $*$ désigne le produit de convolution. En déduire f.

Solution :
On souhaite résoudre l'Éq. (1). Pour cela, on utilise le fait que δ est le neutre pour l'opération de convolution :

$$g(x) = (g*\delta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,\delta(x-x')g(x').$$

On doit donc résoudre

$$f''(x) - s^2 f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,\delta(x-x')g(x').$$

Le second membre peut s'interpréter comme une superposition de δ pondérés par g. Pour un second membre de la forme $\delta(x-x')$, la solution a été déterminée dans les questions précédentes : il s'agit de $f_\delta(x-x')$. Par linéarité, la solution de cette équation différentielle sera donc

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\, f_\delta(x-x')g(x') = (f_\delta * g)(x).$$

On calcule maintenant explicitement ce produit de convolution pour $g(x) = \cos(qx)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\, e^{-s|x-x'|}\cos(qx').$$

On décompose l'intégrale pour expliciter la valeur absolue, et on obtient

$$f(x) = -\frac{1}{2s}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}x'\, e^{-s(x-x')}\cos(qx') - \frac{1}{2s}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{d}x'\, e^{s(x-x')}\cos(qx').$$

On effectue alors les changements de variables $y = x - x'$ et $y = x' - x$ dans les deux intégrales respectivement, et on trouve, après manipulations des fonctions trigonométriques,

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{2s}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\, e^{-sy}\cos[q(x-y)] - \frac{1}{2s}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\, e^{-sy}\cos[q(x+y)] \\ &= -\frac{1}{s}\cos(qx)\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\, e^{-sy}\cos(qy).\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale restante en passant en complexes

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\, e^{-sy}\cos(qy) = \mathrm{Re}\left[\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\, e^{-(s+iq)y}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{s+iq}\right] = \frac{s}{s^2+q^2},$$

soit finalement
$$f(x) = -\frac{1}{s^2+q^2}\cos(qx).$$

I.G. Retrouver le résultat de la question précédente par un calcul direct.

Solution :
On veut résoudre l'équation différentielle $f''(x) - s^2 f(x) = \cos(qx)$. Par linéarité, on cherche une solution de la forme $f(x) = C\cos(qx)$. En réinjectant, on trouve que f est solution si et seulement si $-q^2C - s^2C = 1$, et on retrouve le résultat de la question précédente.

I.H. Retrouver le même résultat en utilisant la méthode de variation des deux constantes.

Solution :
On souhaite déterminer l'unique solution au problème de Cauchy :
$$\begin{cases} f''(x) - s^2 f(x) = \cos(qx), \\ f(0) = -\dfrac{1}{s^2+q^2}. \end{cases}$$

Pour cela, on commence par résoudre l'équation homogène associée dont la solution s'écrit $f_{\mathrm{h}}(x) = A\cosh(sx) + B\sinh(sx)$, où A et B sont des constantes d'intégration. On cherche maintenant une solution au problème de Cauchy $f(x)$ telle que
$$\begin{cases} f(x) = A(x)\cosh(sx) + B(x)\sinh(sx), \\ f'(x) = sA(x)\sinh(sx) + sB(x)\cosh(sx). \end{cases}$$

On détermine alors $f''(x)$, et on en déduit alors que f est solution si et seulement si
$$sA'(x)\sinh(sx) + sB'(x)\cosh(sx) = \cos(qx).$$

De plus en dérivant f, on obtient que
$$A'(x)\cosh(sx) + B'(x)\sinh(sx) = 0.$$

La résolution des deux équations précédentes par la méthode de Cramer permet d'aboutir à
$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(qx) & s\cosh(sx) \\ 0 & \sinh(sx) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\sinh(sx) & s\cosh(sx) \\ \cosh(sx) & \sinh(sx) \end{vmatrix}} = -\frac{1}{s}\cos(qx)\sinh(sx),$$

et
$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} s\sinh(sx) & \cos(qx) \\ \cosh(sx) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s\sinh(sx) & s\cosh(sx) \\ \cosh(sx) & \sinh(sx) \end{vmatrix}} = \frac{1}{s}\cos(qx)\cosh(sx).$$

La solution du problème de Cauchy s'écrit alors
$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\frac{1}{s}\int_0^x \mathrm{d}x'\cos(qx')\sinh(sx') - \frac{1}{s^2+q^2}\right]\cosh(sx) + \frac{1}{s}\int_0^x \mathrm{d}x'\cos(qx')\cosh(sx')\sinh(sx), \\ &= \frac{1}{s}\int_0^x \mathrm{d}x'\cos(qx')\sinh[s(x-x')] - \frac{1}{s^2+q^2}\cosh(sx), \end{aligned}$$

où on ajouté une solution de l'équation homogène pour vérifier la condition initiale.
Il nous reste maintenant à calculer l'intégrale en passant en complexes :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{d}x' \cos(qx') \sinh[s(x-x')] &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^x \mathrm{d}x'\, e^{\mathrm{i}qx'}\left[e^{s(x-x')} - e^{-s(x-x')}\right]\right\},\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{e^{sx}\left[\frac{e^{(\mathrm{i}q-s)x'}}{\mathrm{i}q-s}\right]_0^x - e^{-sx}\left[\frac{e^{(\mathrm{i}q+s)x'}}{\mathrm{i}q+s}\right]_0^x\right\},\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{sx}\left[e^{(\mathrm{i}q-s)x}-1\right]}{\mathrm{i}q-s} - \frac{e^{-sx}\left[e^{(\mathrm{i}q+s)x}-1\right]}{\mathrm{i}q+s}\right\},\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\mathrm{i}qx}-e^{sx}}{\mathrm{i}q-s} - \frac{e^{\mathrm{i}qx}-e^{-sx}}{\mathrm{i}q+s}\right\},\\
&= -\frac{1}{2(s^2+q^2)}\mathrm{Re}\left\{(\mathrm{i}q+s)\left(e^{\mathrm{i}qx}-e^{sx}\right) - (\mathrm{i}q-s)\left(e^{\mathrm{i}qx}-e^{-sx}\right)\right\},\\
&= -\frac{s}{s^2+q^2}\left[\cos(qx) - \cosh(sx)\right].
\end{aligned}$$

On retrouve alors le résultat des deux questions précédentes.

II. Calcul d'intégrales Gaussiennes

On souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\vec{x}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{b}}, \tag{3}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$. On rappelle que :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}\cdot\vec{b} = \vec{x}^T\vec{b} = \sum_{i=1}^n b_i x_i.$$

II.A. Justifier qu'on peut toujours se ramener à une matrice A symétrique. Par la suite, on supposera la matrice A symétrique et définie positive : $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n\ \vec{x}^T A\vec{x} \geq 0$ et $\vec{x}^T A\vec{x} = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Solution :
On décompose la matrice A en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique respectivement :

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}.$$

On a alors, pour $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x}^T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)\vec{x} + \vec{x}^T\left(\frac{A-A^T}{2}\right)\vec{x}.$$

Or,

$$\vec{x}^T\left(\frac{A-A^T}{2}\right)\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x}^T A^T\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}^T(A\vec{x}) - \frac{1}{2}(A\vec{x})^T\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}\cdot(A\vec{x}) - \frac{1}{2}(A\vec{x})\cdot\vec{x} = 0.$$

On en tire donc que

$$\vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x}^T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)\vec{x},$$

et donc qu'on peut se ramener à une matrice symétrique, quitte à remplacer A par sa partie symétrique $(A+A^T)/2$.

II.B. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PP^T = P^TP = \mathrm{Id}, \quad \Delta \text{ diagonale à valeurs strictement positives}, \quad A = P\Delta P^T.$$

Solution :
La matrice A étant symétrique et réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. Il existe donc une matrice Δ diagonale à valeurs réelles, et une matrice P orthogonale (vérifiant $PP^T = P^TP = \mathrm{Id}$) telles que $A = P\Delta P^T$. De plus, si $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, on a que $\vec{v}^T A\vec{v} = \lambda\|\vec{v}\|^2$. Comme $\vec{v}^T A\vec{v} > 0$, on en déduit que $\lambda > 0$. La matrice Δ est donc à valeurs strictement positives.

II.C. On rappelle le résultat de l'intégrale Gaussienne à une dimension (pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, e^{-ay^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{4}$$

Montrer que l'intégrale donnée par l'Éq. (3) s'écrit :

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b}}.$$

<u>Indication :</u> On utilisera le résultat de la question précédente, et on effectuera un changement de variable.

Solution :
On utilise la décomposition de la question précédente, et on a (avec $\vec{x} \cdot \vec{b} = \vec{x}^T\vec{b}$)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\vec{x}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T P\Delta P^T\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{b}}, \\
&= \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\vec{x}\, e^{-\frac{1}{2}(P^T\vec{x})^T\Delta(P^T\vec{x}) + \vec{x}^T PP^T\vec{b}}, \\
&= \int_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\vec{x}\, e^{-\frac{1}{2}(P^T\vec{x})^T\Delta(P^T\vec{x}) + (P^T\vec{x})^T(P^T\vec{b})},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice P est orthogonale. On effectue alors le changement de variable $\vec{y} = P^T\vec{x}$, de jacobienne P^T (changement de variable linéaire inversible). Le déterminant de la matrice P valant ± 1, la valeur absolue du jacobien vaut 1, et la formule du changement de variable donne alors

$$I = \int_{\vec{y}\in\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\vec{y}\, e^{-\frac{1}{2}\vec{y}^T\Delta\vec{y} + \vec{y}^T(P^T\vec{b})}.$$

En notant $\vec{b'} = P^T\vec{b}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres de A, on obtient

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_n\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i b'_i}.$$

On peut alors intégrer séparément sur chacune des variables, en complétant d'abord le carré :

$$I = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_i\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2 + y_i b'_i} = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y_i\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_i(y_i - b'_i/\lambda_i)^2 + b_i'^2/(2\lambda_i)}.$$

On effectue dans chacune des intégrales le changement de variable $z_i = y_i - b'_i/\lambda_i$, et on trouve

$$I = \prod_{i=1}^{n} e^{b_i'^2/(2\lambda_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z_i\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_i z_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} e^{b_i'^2/(2\lambda_i)},$$

soit finalement, en reconnaissant le déterminant de A comme le produit de ses valeurs propres,

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}} e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i'^2/\lambda_i} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{2}\vec{b'}^T\Delta^{-1}\vec{b'}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T P\Delta^{-1}P^T\vec{b}}.$$

On obtient alors le résultat demandé en notant que $A^{-1} = (P\Delta P^T)^{-1} = (P^T)^{-1}\Delta^{-1}P^{-1} = P\Delta^{-1}P^T$ (P est une matrice orthogonale).

II.D. En déduire la valeur de l'intégrale (pour $a \in \mathbb{C}$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, e^{-x^2-2y^2-z^2+xy+ay}.$$

Solution :
On va appliquer le résultat de la question précédente pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors, en développant par rapport à la dernière ligne

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14.$$

De plus, on a que

$$\frac{1}{2}\vec{b}^T A^{-1}\vec{b} = \frac{a^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2}(A^{-1})_{22} = \frac{a^2}{2\det(A)} [\mathrm{Com}(A)]_{22}\,.$$

Ici $[\mathrm{Com}(A)]_{22} = 4$, d'où l'on en conclut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, e^{-x^2-2y^2-z^2+xy+ay} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{14}} e^{a^2/7} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{7}} e^{a^2/7}.$$

On termine par mentionner qu'il faut vérifier que A définit bien une forme quadratique définie positive pour faire le raisonnement ci-dessus. Pour cela, il suffit de montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives. Le calcul du polynôme caractéristique donne

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ -1 & 4-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\left[(2-X)(4-X)-1\right] = (1-X)(X^2-6X+7).$$

On obtient déjà que 1 est valeur propre, tandis que les deux autres valent $3 \pm \sqrt{2}$. Toutes les valeurs propres sont strictement positives, ce qui assure que A définit bien une forme quadratique définie positive.

II.E. Retrouver le résultat de l'Éq. (4) en calculant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, e^{-a(x^2+y^2)}.$$

Indication : On pourra calculer cette intégrale à l'aide d'un changement de variables, puis relier cette intégrale à celle donnée dans l'Éq. (4).

Solution :
On note J l'intégrale de l'Éq. (4), et on observe que

$$J^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, , e^{-ax^2}\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, e^{-a(x^2+y^2)},$$

c'est-à-dire que J^2 est l'intégrale que l'énoncé demande de calculer. Pour calculer cette dernière intégrale, on passe en coordonnées polaires, et on obtient

$$J^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \, r e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \, r e^{-ar^2} = 2\pi \left[\frac{-1}{2a} e^{-ar^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a},$$

d'où le résultat attendu en prenant la racine carrée.

III. Produit scalaire et espace de matrices

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n. On définit

$$\forall \, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B), \tag{5}$$

avec $A^\dagger = \overline{A^T}$ le conjugué hermitien de la matrice A.

III.A. Montrer que $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution :
Il faut vérifier que le produit scalaire est linéaire à droite, ce qui est évident, par linéarité de la trace.
Il faut ensuite prouver que le produit scalaire est à symétrie hermitienne [$\langle B|A\rangle = \overline{\langle A|B\rangle}$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}]$:

$$\langle B|A\rangle = \mathrm{Tr}(B^\dagger A) = \mathrm{Tr}(\overline{B^T} A) = \overline{\mathrm{Tr}(B^T \overline{A})} = \overline{\mathrm{Tr}[(B^T \overline{A})^T]} = \overline{\mathrm{Tr}(A^\dagger B)} = \overline{\langle A|B\rangle},$$

où on a utilisé que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
Il faut enfin vérifier que le produit scalaire est défini positif ($\langle A|A\rangle \geq 0$ et $\langle A|A\rangle = 0 \Longrightarrow A = 0$) :

$$\langle A|A\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \mathrm{Tr}(\overline{A^T} A) = \sum_{i=1}^n (\overline{A^T} A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{(A^T)_{ij}} A_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ji}|^2 \geq 0.$$

De plus si $\langle A|A\rangle = 0$, alors tous les coefficients de A sont nuls.

III.B. Soit $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endormorphisme

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto FM \end{cases}.$$

Déterminer l'adjoint $f^\dagger$ de f. À quelle condition sur la matrice F l'endormorphisme f est-il auto-adjoint ?

Solution :
On calcule le produit scalaire $\langle A|f(B)\rangle$ (pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) afin de déterminer $f^\dagger$:

$$\langle A|f(B)\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger FB) = \sum_{i=1}^{n}(A^\dagger FB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A^\dagger)_{ij}F_{jk}B_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_{ji}}F_{jk}B_{ki}.$$

On a alors,

$$\langle A|f(B)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_{ji}\overline{F_{jk}}}B_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{(F^\dagger)_{kj}A_{ji}}B_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{(F^\dagger A)_{ki}}B_{ki} = \mathrm{Tr}((F^\dagger A)^\dagger B).$$

On en déduit alors que

$$\langle A|f(B)\rangle = \mathrm{Tr}((F^\dagger A)^\dagger B) = \langle F^\dagger A|B\rangle = \langle f^\dagger(A)|B\rangle$$

Ceci étant vrai pour toutes matrices A et B, et le produit scalaire étant défini positif, on en déduit que

$$f^\dagger : \left\{\begin{array}{l}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto F^\dagger M\end{array}\right. .$$

On en conclut donc que f est auto-adjoint si et seulement si F est à symétrie hermitienne ($F = F^\dagger$).

III.C. On se place dans le cas particulier $n = 2$ jusqu'à la fin de l'exercice. On considère le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Déterminer son orthogonal $\mathcal{F}^\perp = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | \forall N \in \mathcal{F}\ \langle N|M\rangle = 0\}$.

Solution :
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp &\iff \forall (a',b') \in \mathbb{C}^2\ \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a'\end{pmatrix}\right] = 0, \\ &\iff \overline{a}a' - \overline{c}b' + \overline{b}b' + \overline{d}a' = 0, \\ &\iff b = c \text{ et } a = -d. \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\mathcal{F}^\perp = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

III.D. En déduire la distance de la matrice (pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$)

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

à $\mathcal{F}$.

Solution :
Le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ est de dimension 2, engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

De la même manière, son orthogonal est de dimension 2, engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La réunion de ces deux familles forme une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On va alors décomposer la matrice J sur ces quatre matrices pour déterminer la projection de J sur $\mathcal{F}$ et son orthogonal :

$$J = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\alpha = (a+d)/2$, $\beta = (b-c)/2$, $\gamma = (a-d)/2$ et $\delta = (b+c)/2$. La distance de J à $\mathcal{F}$ correspond alors à la norme de

$$J_\perp = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

son projeté orthogonal sur $\mathcal{F}^\perp$, soit

$$d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{\langle J_\perp | J_\perp \rangle} = \sqrt{2\left[|\gamma|^2 + |\delta|^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[|a-d|^2 + |b+c|^2\right]}.$$

III.E. Déterminer la matrice de f dans la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Retrouve-t-on le résultat de la question B ?

Solution :
On détermine l'image des éléments de f :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{pmatrix} = F_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{12} & 0 \\ F_{22} & 0 \end{pmatrix} = F_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{11} \\ 0 & F_{21} \end{pmatrix} = F_{11} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} = F_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en tire alors que la matrice de f est

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0_2 \\ 0_2 & F \end{pmatrix},$$

où la dernière écriture correspond à une écriture par blocs de la matrice, avec 0_2 la matrice nulle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
On vérifie aisément que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale pour le produit scalaire. On en conclut donc que f est auto-adjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est à symétrie hermitienne, ce qui est équivalent à dire que $F = F^\dagger$. On retrouve bien le résultat de la question B.

IV. Courbe et surface paramétrées

On considère une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ fermée de classe $\mathcal{C}^1$ dans le plan (xOy) de paramétrisation (voir par exemple la Fig. 1)

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} [0,\ 1] \to \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

On considère la surface paramétrée $\mathscr{S}$ obtenue à partir de la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ par rotation autour de l'axe (Oy). Une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$ est

$$\vec{\Sigma} : \begin{cases} [0,\ 1] \times [0,\ \pi] \to \mathbb{R}^3 \\ (t,\ \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x(t)\cos\theta \\ \gamma_y(t) \\ -\gamma_x(t)\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}. \tag{6}$$

IV.A. Justifier la paramétrisation de la surface donnée par l'Éq. (6).

Solution :
On obtient la paramétrisation de la surface en appliquant la matrice de rotation d'un angle θ autour de l'axe (Oy)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

au vecteur donnant les composantes d'un point de la courbe paramétrée. Ici θ varie entre 0 et π pour que chaque point de la surface ne soit pas multi-paramétré.

IV.B. Déterminer l'expression de la longueur $\mathcal{L}$ de la courbe $\mathscr{C}$ en fonction de γ_x, γ_y et leurs dérivées.

Solution :
Le résultat a été vu en cours et découle de la définition de l'intégrale curviligne d'un champ scalaire :

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \|\vec{\gamma}'(t)\| = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2}.$$

IV.C. De la même manière, montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la surface $\mathscr{S}$ a pour expression

$$\mathcal{A} = \pi \int_0^1 \mathrm{d}t\, |\gamma_x(t)| \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2}.$$

Solution :
Pour déterminer $\mathcal{A}$, on part de la définition de l'intégrale surfacique d'un champ scalaire f :

$$\iint f \mathrm{d}S = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, f(\vec{\Sigma}(t,\theta)) \left\| \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial \theta} \right\|.$$

En prenant $f = 1$, on obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left\| \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial \theta} \right\|.$$

Ici, on a :

$$\frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \gamma_x'(t)\cos\theta \\ \gamma_y'(t) \\ -\gamma_x'(t)\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\gamma_x(t)\sin\theta \\ 0 \\ -\gamma_x(t)\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial t} \times \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\gamma_y'(t)\gamma_x(t)\cos\theta \\ \gamma_x'(t)\gamma_x(t) \\ \gamma_y'(t)\gamma_x(t)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta |\gamma_x(t)| \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2} = \pi \int_0^1 \mathrm{d}t\, |\gamma_x(t)| \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2}.$$

IV.D. On définit $\mathscr{V}$ le volume délimité par la surface $\mathscr{S}$ fermée. En considérant le champ de vecteurs

$$\vec{v} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases},$$

montrer que le volume $\mathcal{V}$ de $\mathscr{V}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \int_0^1 \mathrm{d}t\, |\gamma_x(t)|\, |\gamma_y(t)\gamma_x'(t) - \gamma_x(t)\gamma_y'(t)|.$$

Indication : On pourra utiliser le théorème de Green-Ostrogradski, après avoir montré le résultat suivant : $\mathcal{V} = (1/3) \iiint_{\mathscr{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V$.

Solution :
La surface $\mathscr{S}$ étant fermée, si on l'oriente vers l'extérieur, le théorème de Green-Ostrogradski implique que

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V = 3 \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{d}V = 3\mathcal{V}.$$

On exprime maintenant le flux de $\vec{v}$ en utilisant la définition de l'intégrale surfacique. Il faut prendre garde que $\mathrm{d}\vec{S}$ doit être orienté vers l'extérieur, ce qui revient à dire que $\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \geq 0$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \oiint_{\mathscr{S}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left| \vec{v}(\vec{\Sigma}(t,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial t} \times \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial\theta} \right) \right|, \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left| \begin{pmatrix} \gamma_x(t)\cos\theta \\ \gamma_y(t) \\ -\gamma_x(t)\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\gamma_y'(t)\gamma_x(t)\cos\theta \\ \gamma_x'(t)\gamma_x(t) \\ \gamma_y'(t)\gamma_x(t)\sin\theta \end{pmatrix} \right|, \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, |\gamma_x(t)|\, |\gamma_y(t)\gamma_x'(t) - \gamma_x(t)\gamma_y'(t)|, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé en intégrant sur θ.

IV.E. On considère la courbe paramétrée, appelée astroïde, de paramétrisation

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} [0,\ 1] \to \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3(2\pi t) \\ \sin^3(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

et représentée Fig. 1. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que $\mathcal{L} = 6$, et déterminer les valeurs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$.

Solution :
On commence par déterminer la longueur $\mathcal{L}$. Pour cela, il faut déterminer la dérivée $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -6\pi\cos^2(2\pi t)\sin(2\pi t) \\ 6\pi\sin^2(2\pi t)\cos(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2} = 6\pi|\cos(2\pi t)\sin(2\pi t)|$. On en déduit donc, après le changement de variable $u = 2\pi t$,

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \|\vec{\gamma}'(t)\| = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u\, |\cos(u)\sin(u)| = 6\int_0^{\pi} \mathrm{d}u\, |\cos(u)|\sin(u).$$

On peut alors effectuer le changement de variable $w = -\cos(u)$ $[\mathrm{d}w = \sin(u)\mathrm{d}u]$, soit

$$\mathcal{L} = 6\int_{-1}^{1} \mathrm{d}w\, |w| = 12\int_0^1 \mathrm{d}w\, w = 6.$$

On peut de la même manière calculer l'aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi\int_0^1 \mathrm{d}t\, |\cos^3(2\pi t)| \times 6\pi|\cos(2\pi t)\sin(2\pi t)|, \\ &= 3\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u\, \cos^4(u)|\sin(u)|, \\ &= 6\pi\int_0^{\pi} \mathrm{d}u\, \cos^4(u)\sin(u).\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables $w = -\cos(u)$, et on obtient

$$\mathcal{A} = 6\pi\int_{-1}^{1} \mathrm{d}w\, w^4 = \frac{12\pi}{5}.$$

On calcule enfin le volume :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{\pi}{3}\int_0^1 \mathrm{d}t\, |\cos^3(2\pi t)|\, |\sin^3(2\pi t)(-6\pi)\cos^2(2\pi t)\sin(2\pi t) - \cos^3(2\pi t)6\pi\sin^2(2\pi t)\cos(2\pi t)|, \\ &= 2\pi^2\int_0^1 \mathrm{d}t\, |\cos^5(2\pi t)|\sin^2(2\pi t), \\ &= \pi\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u\, |\cos^5(u)|\sin^2(u), \\ &= 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u\, \cos^5(u)\sin^2(u), \\ &= 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u\, \cos(u)\left[1 - \sin^2(u)\right]^2\sin^2(u),\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. On effectue enfin le changement de variable $w = \sin(u)$ $[\mathrm{d}w = \sin(u)\mathrm{d}u]$, et on trouve

$$\mathcal{V} = 2\pi\int_{-1}^{1} \mathrm{d}w\, (1 - w^2)^2 w^2 = 2\pi\int_{-1}^{1} \mathrm{d}w\, \left(w^2 - 2w^4 + w^6\right) = 4\pi\int_0^1 \mathrm{d}w\, \left(w^2 - 2w^4 + w^6\right),$$

soit finalement

$$\mathcal{V} = 4\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{32\pi}{105}.$$

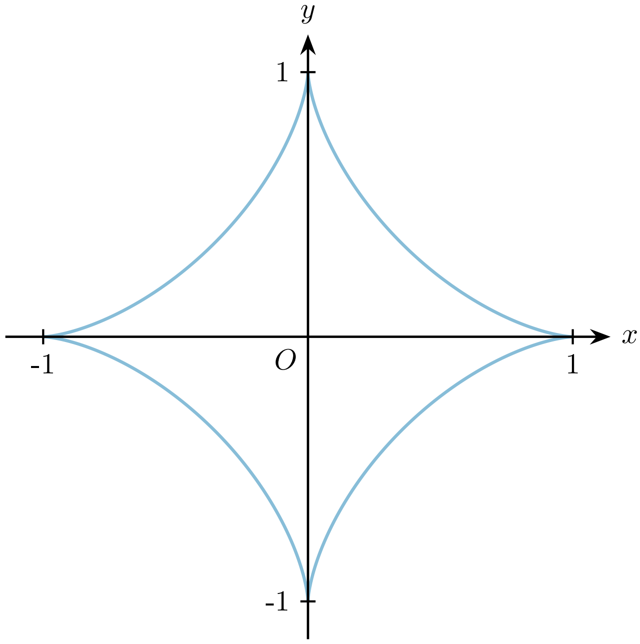

FIGURE 1 – Représentation de l'astroïde dans le plan (xOy).

V. Résolution d'une équation fonctionnelle

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle (pour $q, q' \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\beta \in [0,\, q/\pi[$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin_c(q'x) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \sin_c[q(x-y)] f(y), \tag{7}$$

d'inconnue f. Pour cela, on propose d'utiliser la transformée de Fourier. Pour une fonction $u(x)$, sa transformée de Fourier $\hat{u}(k)$ est définie par

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, u(x) e^{-\mathrm{i}kx},$$

et sa transformée de Fourier inverse par

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \hat{u}(k) e^{\mathrm{i}kx}.$$

On rappelle que la fonction $\sin_c$ est définie par

$$\sin_c : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)/x \end{array} \right. .$$

V.A. En utilisant le fait que

$$\sin_c(qx) = \frac{1}{2q} \int_{-q}^{q} \mathrm{d}k'\, e^{\mathrm{i}k'x},$$

déterminer la transformée de Fourier de la fonction $g_q : x \mapsto \sin_c(qx)$.

Solution :
On calcule la transformée de Fourier de $g_q(x) = \sin_c(qx)$ à partir de sa définition :

$$\hat{g}_q(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \sin_c(qx) e^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2q} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-q}^{q} \mathrm{d}k' e^{\mathrm{i}(k'-k)x}.$$

On intervertit les deux intégrales, et on utilise le résultat vu en cours que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{\mathrm{i}(k'-k)x} = 2\pi\delta(k-k'),$$

et on aboutit à

$$\hat{g}_q(k) = \frac{\pi}{q}\int_{-q}^{q} \mathrm{d}k'\, \delta(k-k') = \begin{cases} \dfrac{\pi}{q} \text{ si } |k|<q, \\ 0 \text{ si } |k|>q \end{cases}.$$

V.B. Appliquer la transformée de Fourier à l'Éq. (7). En déduire l'expression de $\hat{f}$.

Solution :
On applique la transformée de Fourier à l'Éq. (7), qu'on réécrit sous la forme

$$f(x) = g_{q'}(x) + \beta(q_g * f)(x).$$

Il faut tout d'abord déterminer la transformée de Fourier du produit de convolution :

$$\widehat{(g_q * f)}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, g_q(x-y)f(y)e^{-\mathrm{i}kx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, f(y)e^{-\mathrm{i}ky} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, g_q(x-y)e^{-\mathrm{i}k(x-y)},$$

soit $\widehat{(g_q * f)}(k) = \hat{g}_q(k)\hat{f}(k)$. On en conclut donc que

$$\hat{f}(k) = \hat{g_{q'}}(k) + \beta\hat{f}(k)\hat{g}_q(k) \Longrightarrow \hat{f}(k) = \frac{\hat{g_{q'}}(k)}{1-\beta\hat{g}_q(k)}.$$

V.C. En déduire l'expression de $f(x)$.
<u>Indication :</u> On distinguera les cas $q>q'$ et $q<q'$.

Solution :
On détermine la transformée de Fourier inverse de f :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2q'}\int_{-q'}^{q'} \mathrm{d}k\, \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1-\beta\hat{g}_q(k)}.$$

Si $q>q'$, alors $\forall k \in]-q', q'[$, $\hat{g}_q(k) = \pi/q$, et on en conclut que

$$f(x) = \frac{1}{2q'(1-\beta\pi/q)}\int_{-q'}^{q'} \mathrm{d}k\, e^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2q'(1-\beta\pi/q)}\frac{e^{\mathrm{i}q'x}-e^{-\mathrm{i}q'x}}{\mathrm{i}x} = \frac{\mathrm{sin_c}(q'x)}{1-\beta\pi/q}.$$

Si $q<q'$, alors, il faut distinguer les intégrales pour $|k|<q$ et $|k|>q$, soit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2q'(1-\beta\pi/q)}\int_{-q}^{q} \mathrm{d}k\, e^{\mathrm{i}kx} + \frac{1}{2q'}\int_{-q'}^{-q} \mathrm{d}k\, e^{\mathrm{i}kx} + \frac{1}{2q'}\int_{q}^{q'} \mathrm{d}k\, e^{\mathrm{i}kx}, \\ &= \frac{q}{q'(1-\beta\pi/q)}\mathrm{sin_c}(qx) + \frac{e^{-\mathrm{i}qx}-e^{-\mathrm{i}q'x}}{2q'} + \frac{e^{\mathrm{i}q'x}-e^{\mathrm{i}qx}}{2q'}, \\ &= \frac{q}{q'(1-\beta\pi/q)}\mathrm{sin_c}(qx) - \frac{q}{q'}\mathrm{sin_c}(qx) + \mathrm{sin_c}(q'x), \\ &= \mathrm{sin_c}(q'x) + \frac{\beta\pi/q'}{1-\beta\pi/q}\mathrm{sin_c}(qx). \end{aligned}$$