

OUTILS MATHÉMATIQUES – EXAMEN (2 HEURES)

Les notes de cours sont le seul document autorisé. Les calculatrices, ou tout autre appareil électronique, sont interdits.

Quelques conseils généraux :

1. L'énoncé est volontairement long, il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.
2. Toute réponse doit être justifiée.
3. Les différents exercices sont indépendants, et il y a beaucoup de questions indépendantes au sein même de chaque exercice.
4. Le soin apporté à la copie, ainsi que l'orthographe, seront pris en compte dans la notation.

I. Moments cinétiques en mécanique quantique

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions $\psi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^3 , de carré intégrable et qui tendent vers 0 à l'infini, muni du produit scalaire

$$\forall \phi, \psi \in E, \quad \langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\phi(x, y, z)} \psi(x, y, z), \quad (1)$$

où $\overline{\phi(x, y, z)}$ désigne le complexe conjugué de $\phi(x, y, z)$.

Sur cet espace, on définit les applications linéaires (avec $i^2 = -1$)

$$L_x : \begin{cases} F \rightarrow E \\ \psi \mapsto L_x \psi \end{cases}, \quad L_x \psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) \mapsto i \left[-y \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, z) + z \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) \right] \end{cases}, \quad (2)$$

$$L_y : \begin{cases} F \rightarrow E \\ \psi \mapsto L_y \psi \end{cases}, \quad L_y \psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) \mapsto i \left[-z \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z) + x \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, y, z) \right] \end{cases}, \quad (3)$$

$$L_z : \begin{cases} F \rightarrow E \\ \psi \mapsto L_z \psi \end{cases}, \quad L_z \psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) \mapsto i \left[-x \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) + y \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z) \right] \end{cases}, \quad (4)$$

où F désigne le sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble des éléments $\psi \in E$ tels que $L_x \psi$, $L_y \psi$, et $L_z \psi$ sont dans E .

I.A. Justifier que E est un espace vectoriel. E muni de son produit scalaire est-il un espace préhilbertien ? un espace hermitien ?

Solution :

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont simples à montrer. Le seul point un peu délicat consiste à montrer que la somme de deux éléments de E est toujours dans E . Pour cela, on prend ϕ et ψ dans E . Leur somme est bien \mathcal{C}^3 et tend bien vers 0 à l'infini, et il faut maintenant montrer qu'elle est de carré intégrable. Or, pour tout $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$|\phi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})|^2 = |\phi(\vec{x})|^2 + |\psi(\vec{x})|^2 + \overline{\phi(\vec{x})}\psi(\vec{x}) + \overline{\psi(\vec{x})}\phi(\vec{x}).$$

Or, on a que : $\overline{\phi(\vec{x})}\psi(\vec{x}) + \overline{\psi(\vec{x})}\phi(\vec{x}) = 2\text{Re}(\overline{\phi(\vec{x})}\psi(\vec{x})) \leq 2|\overline{\phi(\vec{x})}\psi(\vec{x})| = 2|\phi(\vec{x})||\psi(\vec{x})|$. On en conclut donc que

$$|\phi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})|^2 \leq |\phi(\vec{x})|^2 + |\psi(\vec{x})|^2 + 2|\phi(\vec{x})||\psi(\vec{x})| = (|\phi(\vec{x})| + |\psi(\vec{x})|)^2 \leq 2(|\phi(\vec{x})|^2 + |\psi(\vec{x})|^2),$$

car $(|\phi(\vec{x})| - |\psi(\vec{x})|)^2 \geq 0$. Le membre de droite de l'équation précédente étant intégrable, on en déduit que le membre de gauche l'est aussi, et donc que la somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable.

E muni de son produit scalaire est un espace préhilbertien, car un espace préhilbertien est simplement un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Par contre, il n'est pas hermitien, car il n'est pas de dimension finie.

I.B. Montrer que L_z est auto-adjoint. On admettra par la suite que cela est également le cas pour L_x et L_y .

Solution :

On calcule l'adjoint de l'opérateur L_z en utilisant la définition de l'adjoint (pour $\phi, \psi \in F$) :

$$\langle \phi | L_z \psi \rangle = \langle L_z^\dagger \phi | \psi \rangle.$$

Or

$$\langle \phi | L_z \psi \rangle = i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\phi(x, y, z)} \left[-x \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) + y \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z) \right],$$

qu'on peut transformer par intégration par parties. Pour la première intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \overline{\phi(x, y, z)} x \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\overline{\phi(x, y, z)} x \psi(x, y, z) \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \overline{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z)} x \psi(x, y, z), \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z)} x \psi(x, y, z) \end{aligned},$$

le terme entre crochets étant nul car les fonctions ϕ et ψ tendent vers 0 à l'infini. On procède pareillement pour le second terme, et on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\phi(x, y, z)} y \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, z) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z)} y \psi(x, y, z). \end{aligned}$$

On obtient donc finalement que

$$\begin{aligned} \langle \phi | L_z \psi \rangle &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \overline{\left[x \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) - y \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) \right]} \psi(x, y, z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz i \overline{\left[-x \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) + y \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) \right]} \psi(x, y, z) \\ &= \langle L_z \phi | \psi \rangle \end{aligned}$$

d'où l'on tire que $L_z^\dagger = L_z$.

I.C. On définit G le sous-espace vectoriel de F contenant l'ensemble des éléments ψ de F tels que $L_x \psi$, $L_y \psi$ et $L_z \psi$ sont dans F . On rappelle que le commutateur de deux applications linéaires A et B est $[A, B] = AB - BA$. Calculer le commutateur $[L_x, L_y]$ sur G .

De la même manière, on peut démontrer (**mais cela n'est pas demandé**), que $[L_y, L_z] = iL_x$ et que $[L_z, L_x] = iL_y$.

Solution :

Pour $\psi \in G$, le commutateur s'écrit

$$[L_x, L_y]\psi = L_x L_y \psi - L_y L_x \psi = iL_x \left(-z \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - iL_y \left(-y \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Le premier terme vaut

$$\begin{aligned} iL_x \left(-z \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= y \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= -y \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ &= -y \frac{\partial \psi}{\partial x} - yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

De façon analogue, le second terme vaut

$$\begin{aligned} iL_y \left(-y \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= z \frac{\partial}{\partial x} \left(-y \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(-y \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= -yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - x \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= -yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} - xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Schwarz, qui permet d'intervertir l'ordre des dérivées partielles (fonctions de classe C^2), on obtient finalement, en faisant la différence, que

$$[L_x, L_y]\psi = -y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y} = iL_z \psi \implies [L_x, L_y] = iL_z.$$

I.D. On introduit H le sous-espace vectoriel de G contenant l'ensemble des éléments ψ de G tels que $L_x \psi$, $L_y \psi$ et $L_z \psi$ sont dans G . On définit ensuite l'opérateur \vec{L}^2 sur G par

$$\forall \psi \in G, \quad \vec{L}^2 \psi = L_x(L_x \psi) + L_y(L_y \psi) + L_z(L_z \psi). \tag{5}$$

Calculer le commutateur $[\vec{L}^2, L_z]$ sur H .

Indication : On pourra commencer par démontrer que pour deux applications linéaires A et B , on a $[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A$.

Solution :

On écrit le commutateur demandé

$$[\vec{L}^2, L_z] = [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + [L_z^2, L_z] = [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z],$$

car $[L_z^2, L_z] = L_z^3 - L_z^3 = 0$. Or, on a

$$[L_x^2, L_z] = L_x^2 L_z - L_z L_x^2 = L_x^2 L_z - L_x L_z L_x + L_x L_z L_x - L_z L_x^2 = L_x [L_x, L_z] + [L_x, L_z] L_x,$$

et pareillement $[L_y^2, L_z] = L_y [L_y, L_z] + [L_y, L_z] L_y$, soit

$$[\vec{L}^2, L_z] = L_x [L_x, L_z] + [L_x, L_z] L_x + L_y [L_y, L_z] + [L_y, L_z] L_y.$$

Or d'après la question précédente, on a $[L_x, L_z] = -iL_y$ et $[L_y, L_z] = iL_x$, soit

$$[\vec{L}^2, L_z] = -iL_x L_y - iL_y L_x + iL_y L_x + iL_x L_y = 0.$$

I.E. Parmi les applications linéaires L_x , L_y , L_z et \vec{L}^2 , quelles sont les paires d'applications linéaires qui sont co-diagonalisables? Y a-t-il des triplets d'applications linéaires co-diagonalisables?

Solution :

Les applications L_x , L_y , L_z et \vec{L}^2 sont toutes auto-adjointes (dans un espace de Hilbert) donc diagonalisables. Deux de ces opérateurs seront donc co-diagonalisables si et seulement s'ils commutent. Ainsi, les paires (L_x, \vec{L}^2) , (L_y, \vec{L}^2) et (L_z, \vec{L}^2) sont co-diagonalisables. En effet, le résultat démontré à la question précédente avec L_z se démontre aussi pour L_x et L_y . Par contre, il n'existe aucun triplet d'applications linéaires co-diagonalisables car L_x ne commute pas avec L_y ou L_z .

II. Géométrie d'un film de savon entre deux anneaux coaxiaux

On considère deux anneaux métalliques de même rayon R et séparés d'une hauteur h . Du fait des effets de tension de surface, le film de savon s'appuyant sur les deux anneaux forme une surface, appelée caténoïde¹, voir Fig. 1.

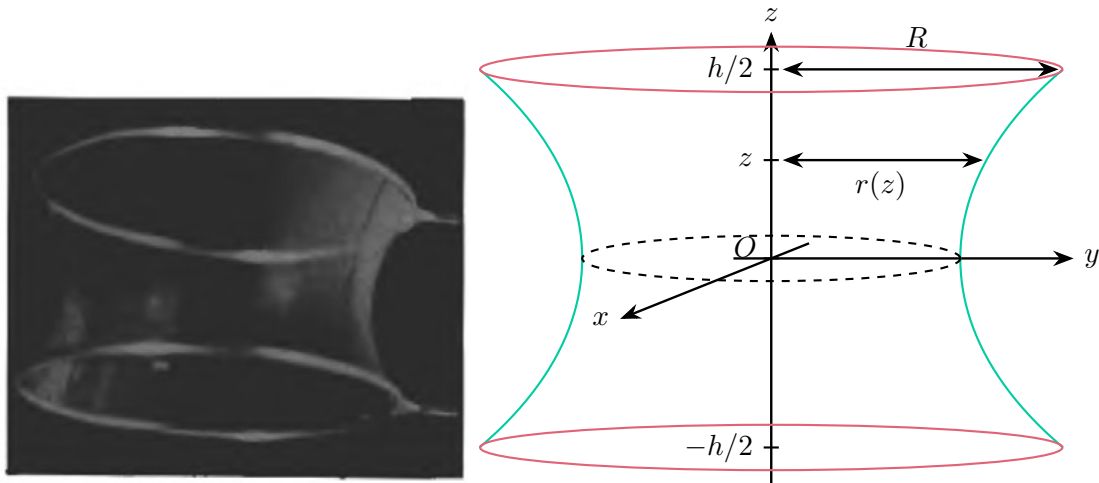


FIGURE 1 – À gauche, forme d'un film de savon s'appuyant sur deux anneaux métalliques de même rayon R et séparés d'une hauteur h . À droite, schéma du système et notations utilisées.

On peut paramétrer cette surface par la fonction suivante

$$\vec{\sigma} : \begin{cases} [0, 2\pi] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r(z) \cos \phi \\ r(z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix}_{x,y,z}, & r(z) = r_0 \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right), \end{cases} \quad (6)$$

qui donne les coordonnées des points M de la surface dans le repère cartésien, dont l'origine O est au milieu de l'axe de la caténoïde, voir Fig. 1 (ϕ est l'angle des coordonnées cylindriques). La constante r_0 est déterminée de sorte que $r_0 \cosh(h/(2r_0)) = R$.

Dans tout l'exercice, des relations de trigonométrie hyperbolique pourront être nécessaires. On en rappelle quelques-unes (pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \\ \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\ \sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x) \end{cases} . \quad (7)$$

1. https://www.youtube.com/watch?v=AcxcgdcUNzA&ab_channel=FluidDynamics

II.A. Calculer le vecteur élémentaire de surface

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} d\phi dz \quad (8)$$

normal à la caténoïde (où \times désigne le produit vectoriel). Est-il dirigé vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la caténoïde ?

Solution :

On calcule l'élément de surface élémentaire comme cela a été vu en cours.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r(z) \sin \phi \\ r(z) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y,z}, \quad \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} r'(z) \cos \phi \\ r'(z) \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y,z},$$

d'où l'on tire que

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = \begin{pmatrix} r(z) \cos \phi \\ r(z) \sin \phi \\ -r(z)r'(z) \end{pmatrix}_{x,y,z}.$$

Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur de la caténoïde car pour $\phi = \pi/2$ (correspondant à $x = 0$), on a

$$d\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(z) \\ -r(z)r'(z) \end{pmatrix}.$$

Dans la partie où $y > 0$, $r(z)$ augmente quand z augmente, de sorte $r'(z) < 0$ et le vecteur $d\vec{S}$ a une projection négative selon \vec{e}_z , en accord avec un sens vers l'extérieur de la caténoïde.

II.B. Calculer l'aire \mathcal{A} de la caténoïde en fonction de r_0 et h .

Solution :

On utilise le résultat vu dans le cours, qui donne que

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} \right\| = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h/2}^{h/2} dz \left\| d\vec{S} \right\|.$$

Or, on obtient facilement que

$$\left\| d\vec{S} \right\| = r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2}.$$

On en déduit alors que

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} dz r_0 \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{z}{r_0}\right)} = 4\pi r_0 \int_0^{h/2} dz \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{z}{r_0}\right)}.$$

Or, on a que $\cosh^2(z/r_0) - \sinh^2(z/r_0) = 1$, d'où l'on tire que

$$\mathcal{A} = 4\pi r_0 \int_0^{h/2} dz \cosh^2\left(\frac{z}{r_0}\right).$$

Étant donné que $\cosh(2z/r_0) = \cosh^2(z/r_0) + \sinh^2(z/r_0) = 2 \cosh^2(z/r_0) - 1$, on obtient finalement que

$$\mathcal{A} = 2\pi r_0 \int_0^{h/2} dz \left[1 + \cosh\left(\frac{2z}{r_0}\right) \right] = 2\pi r_0 \left[z + \frac{r_0}{2} \sinh\left(\frac{2z}{r_0}\right) \right]_0^{h/2} = \pi r_0 \left[h + r_0 \sinh\left(\frac{h}{r_0}\right) \right].$$

II.C. On définit maintenant la surface fermée Σ délimitée latéralement par la caténoïde et en haut et en bas par les deux disques de rayon R aux cotes $\pm h/2$. Cette surface sera orientée de sorte que son vecteur unitaire normal pointe toujours vers l'extérieur. On introduit le champ de vecteurs

$$\vec{v} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{x,y,z} \end{cases} . \quad (9)$$

Calculer le flux de \vec{v} à travers la surface Σ .

Solution :

On décompose la surface Σ en la caténoïde, notée σ , et les deux disques de rayon R aux cotes $\pm h/2$, notés \mathcal{D}^\pm . Le flux du champ de vecteurs \vec{v} s'écrit alors

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{D}^+} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathcal{D}^-} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Pour le disque supérieur, $d\vec{S} = d\rho\rho d\phi \vec{e}_z$ en coordonnées polaires, et l'intégrale vaut finalement

$$\iint_{\mathcal{D}^+} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \vec{v}(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, h/2) \cdot \vec{e}_z = \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{2}.$$

De la même manière, pour le disque inférieur, on a $d\vec{S} = -d\rho\rho d\phi \vec{e}_z$ en coordonnées polaires (car la surface Σ est orientée vers l'extérieur, et dans ce cas le vecteur normal pointe selon $-\vec{e}_z$), et l'intégrale vaut finalement

$$\iint_{\mathcal{D}^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \vec{v}(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, -h/2) \cdot \vec{e}_z = - \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{\pi R^2 h}{2}.$$

Il reste maintenant à calculer le flux sur la caténoïde, qui vaut

$$\iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \vec{v}(r(z) \cos \phi, r(z) \sin \phi, z) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} \right),$$

où le vecteur normal $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z}$ est bien celui dirigé vers l'extérieur de la caténoïde (voir la première question de l'exercice). Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} r(z) \cos \phi \\ r(z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r(z) \cos \phi \\ r(z) \sin \phi \\ -r(z)r'(z) \end{pmatrix} \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi [r(z)^2 - zr(z)r'(z)] \\ &= 4\pi \int_0^{h/2} dz [r(z)^2 - zr(z)r'(z)] \end{aligned} ,$$

par parité de $r(z)$. On utilise alors une intégration par parties :

$$\int_0^{h/2} dz zr(z)r'(z) = \left[\frac{zr(z)^2}{2} \right]_0^{h/2} - \frac{1}{2} \int_0^{h/2} dz r(z)^2 = \frac{hR^2}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{h/2} dz r(z)^2.$$

On en déduit finalement que

$$\iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\pi R^2 h + 6\pi \int_0^{h/2} dz r(z)^2 = -\pi R^2 h + 6\pi r_0^2 \int_0^{h/2} dz \cosh^2 \left(\frac{z}{r_0} \right).$$

Le calcul de cette dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_0^{h/2} dz \cosh^2\left(\frac{z}{r_0}\right) &= \frac{1}{2} \int_0^{h/2} dz \left[1 + \cosh\left(\frac{2z}{r_0}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[z + \frac{r_0}{2} \sinh\left(\frac{2z}{r_0}\right)\right]_0^{h/2} \\ &= \frac{h}{4} + \frac{r_0}{4} \sinh\left(\frac{h}{r_0}\right) \end{aligned}$$

On trouve donc finalement

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\pi R^2 h + \frac{3\pi r_0^2}{2} \left[h + r_0 \sinh\left(\frac{h}{r_0}\right)\right] + \frac{\pi R^2 h}{2} + \frac{\pi R^2 h}{2} = \frac{3\pi r_0^2}{2} \left[h + r_0 \sinh\left(\frac{h}{r_0}\right)\right].$$

II.D. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, en déduire le volume \mathcal{V} à l'intérieur de la surface fermée Σ .

Solution :

On utilise le théorème de Green-Ostrogradski, qui indique que

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Upsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV,$$

où Υ désigne le volume délimité par la surface Σ . Or, ici,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 3,$$

et finalement

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \iiint_{\Upsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi r_0^2}{2} \left[h + r_0 \sinh\left(\frac{h}{r_0}\right)\right] = \frac{1}{2} r_0 \mathcal{A}.$$

II.E. Calculer la longueur \mathcal{L} d'un arc de caténoïde à ϕ constant, c'est-à-dire la longueur de la courbe paramétrée

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ z \mapsto \begin{pmatrix} r(z) \cos \phi \\ r(z) \sin \phi \\ z \end{pmatrix}_{x,y,z} \end{cases}, \quad r(z) = r_0 \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right). \quad (10)$$

Solution :

On calcule la longueur de la courbe en utilisant le résultat du cours

$$\mathcal{L} = \int_{-h/2}^{h/2} dz \|\vec{\gamma}'(z)\|.$$

Or, on a

$$\vec{\gamma}'(z) = \begin{pmatrix} r'(z) \cos \phi \\ r'(z) \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y,z} \implies \|\vec{\gamma}'(z)\| = \sqrt{1 + r'(z)^2},$$

d'où l'on tire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \sqrt{1 + r'(z)^2} = 2 \int_0^{h/2} dz \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{z}{r_0}\right)} \\ &= 2 \int_0^{h/2} dz \cosh\left(\frac{z}{r_0}\right) = 2 \left[r_0 \sinh\left(\frac{z}{r_0}\right) \right]_0^{h/2} = 2r_0 \sinh\left(\frac{h}{2r_0}\right). \end{aligned}$$

III. Dynamique de populations

On s'intéresse dans cet exercice à une modélisation d'une population d'insectes en présence de prédateurs, ici des chauve-souris. Dans la suite, on note $I(t)$ le nombre d'insectes au cours du temps, et $C(t)$ le nombre de chauve-souris. On suppose que les insectes se reproduisent avec un taux de natalité a constant ($a > 0$), et que chaque chauve-souris mange p insectes par unité de temps (avec $p > 0$ constant). Par ailleurs, les chauve-souris ont un comportement migrateur, et on suppose que leur flux est dicté par la population totale d'insectes dans le milieu (avec une constante m positive) : si $I(t)$ est supérieure à une population critique I_c , les chauves-souris arrivent dans le milieu, sinon elles le quittent. Sous ces hypothèses, les équations différentielles qui régissent le nombre d'insectes et de chauve-souris s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt}(t) = aI(t) - pC(t) \\ \frac{dC}{dt}(t) = m(I(t) - I_c) \end{cases}. \quad (11)$$

Dans tout l'exercice, on admettra que l'inégalité $a^2 - 4mp > 0$ est vérifiée.

III.A. En introduisant $\delta I(t) = I(t) - I^*$ et $\delta C(t) = C(t) - C^*$, où I^* et C^* sont des constantes qu'on déterminera, montrer que le système différentiel se met sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta I(t) \\ \delta C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -p \\ m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta I(t) \\ \delta C(t) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Quel est le signe des constantes I^* et C^* , et que représentent-elles physiquement ?

Solution :

On insère les expressions de δI et δC dans le système différentiel, et on trouve

$$\begin{cases} \frac{d\delta I}{dt}(t) = \frac{dI}{dt}(t) = a[\delta I(t) + I^*] - p[\delta C(t) + C^*] \\ \frac{d\delta C}{dt}(t) = \frac{dC}{dt}(t) = m[\delta I(t) + I^* - I_c] \end{cases}.$$

Pour obtenir la solution proposée par l'énoncé, il suffit d'annuler les termes constants dans le système différentiel, menant aux deux équations

$$\begin{cases} aI^* - pC^* = 0 \\ m(I^* - I_c) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} I^* = I_c \\ C^* = \frac{aI_c}{p} \end{cases}.$$

Les constantes I^* et C^* sont positives, et représentent les populations en insectes et chauve-souris dans l'état stationnaire.

III.B. Diagonaliser la matrice $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} a & -p \\ m & 0 \end{pmatrix}$ associée au système différentiel ci-dessus. On montrera qu'elle

peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} = \mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ m & m \end{pmatrix}, \quad (13)$$

avec $\lambda > \mu$ deux réels à déterminer. On calculera également \mathcal{Q}^{-1} sans chercher à expliciter λ et μ .

Solution :

On diagonalise la matrice \mathcal{F} en déterminant d'abord son polynôme caractéristique :

$$\chi_{\mathcal{F}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -p \\ m & -\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(-\lambda) + mp = \lambda^2 - a\lambda + mp.$$

On calcule alors le discriminant $\Delta = a^2 - 4mp > 0$. Le polynôme a deux racines réelles qui sont

$$\lambda = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - mp}, \quad \mu = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - mp}.$$

On détermine maintenant les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Pour la valeur propre λ , on a :

$$\begin{pmatrix} a & -p \\ m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies mx = \lambda y.$$

On peut prendre par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} \lambda \\ m \end{pmatrix}$. On peut procéder *mutatis mutandi* pour la valeur propre μ et on peut prendre le vecteur propre $\begin{pmatrix} \mu \\ m \end{pmatrix}$. Ainsi, si on note

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ m & m \end{pmatrix},$$

alors on aura

$$\mathcal{F} = \mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer \mathcal{Q}^{-1} , et pour cela on utilise la relation

$$\mathcal{Q}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathcal{Q})} \text{Com}(\mathcal{Q})^T = \frac{1}{m(\lambda - \mu)} \begin{pmatrix} m & -\mu \\ -m & \lambda \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que le déterminant de la matrice \mathcal{Q} est bien non nul car $\lambda > \mu$.

III.C. En déduire l'exponentielle de matrice $\exp(t\mathcal{F})$ en fonction de λ , μ , m et t . On rappelle que, pour une matrice \mathcal{B} ,

$$\exp(\mathcal{B}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}^k}{k!}. \quad (14)$$

Solution :

On calcule l'exponentielle demandée par l'énoncé à partir de la série entière

$$\exp(t\mathcal{F}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{F}^k$$

Or $\mathcal{F}^k = (\mathcal{Q}\mathcal{D}\mathcal{Q}^{-1})^k = \mathcal{Q}\mathcal{D}^k\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix} \mathcal{Q}^{-1}$, d'où l'on tire que

$$\exp(t\mathcal{F}) = \mathcal{Q} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{D}^k \mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} \end{pmatrix} \mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \mathcal{Q}^{-1}.$$

Il reste à effectuer les produits matriciels avec la matrice de passage et son inverse, et on trouve

$$\begin{aligned} \exp(t\mathcal{F}) &= \frac{1}{m(\lambda - \mu)} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -\mu \\ -m & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m(\lambda - \mu)} \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} & \mu e^{\mu t} \\ m e^{\lambda t} & m e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -\mu \\ -m & \lambda \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} - \mu e^{\mu t} & p(e^{\mu t} - e^{\lambda t}) \\ m(e^{\lambda t} - e^{\mu t}) & \lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\lambda\mu = mp$ (produit des deux racines du polynôme caractéristique).

III.D. Déterminer la solution générale du système différentiel pour $\delta I(t)$ et $\delta C(t)$.

Solution :

La solution générale du système différentiel est donnée par

$$\begin{pmatrix} \delta I(t) \\ \delta C(t) \end{pmatrix} = \exp(t\mathcal{F}) \begin{pmatrix} I_0 \\ C_0 \end{pmatrix},$$

où I_0 et C_0 sont deux constantes d'intégration. En explicitant les deux équations obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} \delta I(t) &= \frac{I_0}{\lambda - \mu} (\lambda e^{\lambda t} - \mu e^{\mu t}) + \frac{pC_0}{\lambda - \mu} (e^{\mu t} - e^{\lambda t}) \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} (\lambda I_0 - pC_0) + \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu} (pC_0 - \mu I_0). \end{aligned}$$

On procède pareillement pour l'autre population, et on trouve

$$\begin{aligned} \delta C(t) &= \frac{mI_0}{\lambda - \mu} (e^{\lambda t} - e^{\mu t}) + \frac{C_0}{\lambda - \mu} (\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}) \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} (mI_0 - \mu C_0) + \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu} (\lambda C_0 - mI_0). \end{aligned}$$

III.E. Dans la suite, on suppose que $I(0) = N$, et que $C(0) = 0$. Justifier que la solution du système différentiel est alors unique, et exprimer $I(t)$ et $C(t)$.

Solution :

Le théorème de Cauchy assure l'unicité de la solution. On détermine les constantes I_0 et C_0 à partir des conditions initiales $\delta I(0) = N - I^*$ et $\delta C(0) = -C^*$: $I_0 = N - I^*$ et $C_0 = -C^*$. On

a donc finalement l'unique solution :

$$\begin{cases} I(t) = I^* + \delta I(t) = I^* + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} [\lambda(N - I^*) + pC^*] - \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu} [\mu(N - I^*) + pC^*] \\ C(t) = C^* + \delta C(t) = C^* + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} [m(N - I^*) + \mu C^*] - \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu} [m(N - I^*) + \lambda C^*] \end{cases} .$$

III.F. Que se passe-t-il si la condition $a^2 - 4mp > 0$ n'est pas vérifiée ?

Solution :

Si $a^2 - 4mp < 0$, les racines du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées, mais toutes deux de partie réelle positive. La solution de la question précédente reste alors valable, mais fera intervenir des produits d'une fonction sinusoïdale par une exponentielle divergente. Lorsque $a^2 = 4mp$, la matrice \mathcal{F} n'est plus diagonalisable, et les calculs réalisés précédemment ne sont plus corrects. Néanmoins on peut toujours calculer l'exponentielle de la matrice \mathcal{F} en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. Cela n'était pas attendu au cours de l'examen, mais voici une marche à suivre pour calculer $\exp(t\mathcal{F})$ dans le cas où $a^2 = 4mp$. Le polynôme caractéristique de la matrice \mathcal{F} s'écrit alors

$$\chi_{\mathcal{F}}(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + mp = \left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2 ,$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne alors que

$$\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = 0 \implies \left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right)^2 = 0.$$

On en déduit alors facilement que

$$\exp\left(t\left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right)^k = \text{Id} + t\left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right).$$

Or, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne

$$\exp\left(t\left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right)\right) = \exp(t\mathcal{F}) \exp\left(-\frac{at}{2}\text{Id}\right) = e^{-at/2} \exp(t\mathcal{F}),$$

d'où l'on tire finalement que

$$\exp(t\mathcal{F}) = e^{at/2}\text{Id} + te^{at/2} \left(\mathcal{F} - \frac{a}{2}\text{Id}\right) = \begin{pmatrix} e^{at/2}(1 + at/2) & -pte^{at/2} \\ mte^{at/2} & e^{at/2}(1 - at/2) \end{pmatrix}.$$

III.G. Question bonus : Pour tenir compte de la migration des insectes, on propose l'équation différentielle suivante régissant la dynamique d'évolution de $I(t)$ (avec $a^2 > 4mp$) :

$$\frac{d^2 I}{dt^2}(t) - a \frac{dI}{dt}(t) + pm(I(t) - I_c) = \phi(t), \quad I(0) = N, \quad \frac{dI}{dt}(0) = 0. \quad (15)$$

Montrer que

$$I(t) = e^{at/2}(N - I_c) \left[\cosh(st) - \frac{a}{2s} \sinh(st) \right] + I_c + \frac{1}{s} \int_0^t dt' \phi(t') e^{a(t-t')/2} \sinh[s(t-t')], \quad (16)$$

où $s = \sqrt{(a/2)^2 - mp}$.

Solution :

On réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2 I}{dt^2}(t) - a \frac{dI}{dt}(t) + mpI(t) = mpI_c + \phi(t).$$

On commence alors par résoudre l'équation différentielle homogène associée, qui s'écrit

$$\frac{d^2 I_h}{dt^2}(t) - a \frac{dI_h}{dt}(t) + mpI_h(t) = 0.$$

On cherche alors la solution sous forme exponentielle $I_h(t) \propto e^{\nu t}$, et en réinjectant, on obtient l'équation caractéristique associée $\nu^2 - a\nu + mp = 0$, dont les solutions sont λ et μ introduites à la question B. Ainsi, on a simplement

$$I_h(t) = I'_0 e^{\lambda t} + I'_1 e^{\mu t} = e^{at/2} [I_0 \cosh(st) + I_1 \sinh(st)],$$

où I_0 et I_1 (ou I'_0 et I'_1) sont des constantes d'intégration et $s = \sqrt{a^2/4 - mp}$.

Pour déterminer la solution particulière, on coupe le second membre en deux termes mpI_c et $\phi(t)$. Pour le premier second membre, on trouve facilement une solution particulière $I_{p,1}(t) = I_c$. Pour le second terme, on utilise la méthode de variation des deux constantes :

$$\begin{cases} I_{p,2}(t) = e^{at/2} [I_0(t) \cosh(st) + I_1(t) \sinh(st)] \\ \frac{dI_{p,2}}{dt}(t) = I_0(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \cosh(st)] + I_1(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \sinh(st)] \end{cases}.$$

On en déduit alors la dérivée seconde de $I_{p,2}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_{p,2}}{dt^2}(t) &= I_0(t) \frac{d^2}{dt^2} [e^{at/2} \cosh(st)] + I_1(t) \frac{d^2}{dt^2} [e^{at/2} \sinh(st)] \\ &+ \frac{dI_0}{dt}(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \cosh(st)] + \frac{dI_1}{dt}(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \sinh(st)]. \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2 I_{p,2}}{dt^2}(t) - a \frac{dI_{p,2}}{dt}(t) + mpI_{p,2}(t) = \phi(t),$$

on obtient

$$\frac{dI_0}{dt}(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \cosh(st)] + \frac{dI_1}{dt}(t) \frac{d}{dt} [e^{at/2} \sinh(st)] = \phi(t).$$

Par ailleurs, en dérivant l'expression de $I_{p,2}$, on obtient la seconde équation

$$\frac{dI_0}{dt}(t) e^{at/2} \cosh(st) + \frac{dI_1}{dt}(t) e^{at/2} \sinh(st) = 0.$$

On explicite les dérivées première :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [e^{at/2} \cosh(st)] = e^{at/2} \left[\frac{a}{2} \cosh(st) + s \sinh(st) \right] \\ \frac{d}{dt} [e^{at/2} \sinh(st)] = e^{at/2} \left[\frac{a}{2} \sinh(st) + s \cosh(st) \right] \end{cases},$$

d'où l'on tire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dI_0}{dt}(t) \cosh(st) + \frac{dI_1}{dt}(t) \sinh(st) = 0 \\ \frac{dI_0}{dt}(t) \left[\frac{a}{2} \cosh(st) + s \sinh(st) \right] + \frac{dI_1}{dt}(t) \left[\frac{a}{2} \sinh(st) + s \cosh(st) \right] = \phi(t) e^{-at/2} \end{cases}.$$

On en déduit alors la solution de ce système. D'une part, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dI_0}{dt}(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sinh(st) \\ \phi(t)e^{-at/2} & \frac{a}{2}\sinh(st) + s\cosh(st) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cosh(st) & \sinh(st) \\ \frac{a}{2}\cosh(st) + s\sinh(st) & \frac{a}{2}\sinh(st) + s\cosh(st) \end{vmatrix}} \\ &= -\frac{\phi(t)e^{-at/2}\sinh(st)}{s} \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt}(t) &= \frac{\begin{vmatrix} \cosh(st) & 0 \\ \frac{a}{2}\cosh(st) + s\sinh(st) & \phi(t)e^{-at/2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cosh(st) & \sinh(st) \\ \frac{a}{2}\cosh(st) + s\sinh(st) & \frac{a}{2}\sinh(st) + s\cosh(st) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\phi(t)e^{-at/2}\cosh(st)}{s} \end{aligned}$$

On en déduit donc finalement que

$$I_{p,2}(t) = -\frac{1}{s}e^{at/2}\cosh(st)\int_0^t dt' \phi(t')e^{-at'/2}\sinh(st') + \frac{1}{s}e^{at/2}\sinh(st)\int_0^t dt' \phi(t')e^{-at'/2}\cosh(st'),$$

ou encore

$$I_{p,2}(t) = \frac{1}{s}\int_0^t dt' \phi(t')e^{a(t-t')/2}\sinh[s(t-t')].$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par I s'écrit

$$\begin{aligned} I(t) &= I_h(t) + I_{p,1}(t) + I_{p,2}(t) \\ &= e^{at/2}[I_0\cosh(st) + I_1\sinh(st)] + I_c + \frac{1}{s}\int_0^t dt' \phi(t')e^{a(t-t')/2}\sinh[s(t-t')] \end{aligned}$$

Il reste maintenant à imposer les conditions initiales. D'une part, on a :

$$I(0) = N = I_0 + I_c \implies I_0 = N - I_c.$$

D'autre part, on a :

$$\frac{dI}{dt}(0) = 0 = \frac{a}{2}I_0 + sI_1 \implies I_1 = -\frac{a}{2s}(N - I_c)$$

On a donc finalement que

$$I(t) = e^{at/2}(N - I_c) \left[\cosh(st) - \frac{a}{2s}\sinh(st) \right] + I_c + \frac{1}{s}\int_0^t dt' \phi(t')e^{a(t-t')/2}\sinh[s(t-t')].$$

IV. Fonction de Green de l'équation d'advection-diffusion

On s'intéresse à l'évolution spatio-temporelle du champ de concentration $c(\vec{r}, t)$ [$\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$] d'une espèce chimique dans un fluide en écoulement stationnaire à la vitesse \vec{v} constante. On suppose que l'espèce peut se dégrader spontanément selon une cinétique d'ordre 1, avec un taux de dégradation constant ρ , et qu'elle peut être formée à partir d'autres espèces présentes, avec un taux de production $s(\vec{r}, t)$. Sous ces

hypothèses, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de concentration s'écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D\Delta c + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c + \rho c = s, \tag{17}$$

où $D > 0$ désigne le coefficient de diffusion, $\vec{\nabla}$ l'opérateur gradient, et Δ le laplacien. On rappelle que

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}. \tag{18}$$

On définit la transformée de Fourier spatio-temporelle du champ de concentration par $[\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)]$

$$\text{TF}[c](\vec{k}, \omega) = \hat{c}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{r} \in \mathbb{R}^3} d^3r \int_{t \in \mathbb{R}} dt c(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \tag{19}$$

où $d^3r = dx dy dz$, et où $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. La transformée de Fourier inverse est alors obtenue par la relation

$$c(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} d^3k \int_{\omega \in \mathbb{R}} d\omega \hat{c}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \tag{20}$$

où $d^3k = dk_x dk_y dk_z$.

IV.A. Redémontrer les relations suivantes

$$\text{TF} \left[\frac{\partial c}{\partial t} \right] = -i\omega \hat{c}, \quad \text{TF} \left[\frac{\partial c}{\partial x} \right] = ik_x \hat{c}, \quad \text{TF} \left[\frac{\partial c}{\partial y} \right] = ik_y \hat{c}, \quad \text{TF} \left[\frac{\partial c}{\partial z} \right] = ik_z \hat{c}. \tag{21}$$

Solution :

Il suffit de dériver par rapport aux variables d'espace ou de temps l'expression de la transformée de Fourier inverse

$$c(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{t \in \mathbb{R}} d\omega \hat{c}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Par exemple, on aura

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{t \in \mathbb{R}} d\omega \hat{c}(\vec{k}, \omega) (-i\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

et on identifiera alors $-i\omega \hat{c}$ comme la transformée de Fourier de $\partial c / \partial t$.

IV.B. À partir de l'Éq. (17), trouver la relation entre \hat{c} et la transformée de Fourier \hat{s} de s .

Solution :

On utilise les relations de la question précédente, et on en déduit alors, par linéarité de la transformée de Fourier, que

$$\text{TF}[\Delta c] = \text{TF} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right] + \text{TF} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] + \text{TF} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] = (ik_x)^2 \hat{c} + (ik_y)^2 \hat{c} + (ik_z)^2 \hat{c} = -\vec{k}^2 \hat{c},$$

ainsi que

$$\text{TF}[\vec{v} \cdot \vec{\nabla} c] = \text{TF} \left[v_x \frac{\partial c}{\partial x} \right] + \text{TF} \left[v_y \frac{\partial c}{\partial y} \right] + \text{TF} \left[v_z \frac{\partial c}{\partial z} \right] = ik_x v_x \hat{c} + ik_y v_y \hat{c} + ik_z v_z \hat{c} = i\vec{v} \cdot \vec{k} \hat{c}.$$

En passant l'Éq. (17) en transformée de Fourier, on obtient finalement

$$\left(-i\omega + D\vec{k}^2 + i\vec{v} \cdot \vec{k} + \rho \right) \hat{c} = \hat{s},$$

soit finalement

$$\hat{c}(\vec{k}, \omega) = \frac{\hat{s}(\vec{k}, \omega)}{-i\omega + D\vec{k}^2 + i\vec{v} \cdot \vec{k} + \rho}.$$

IV.C. On suppose maintenant que $s(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') = s_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t')$, où δ désigne la distribution de Dirac et où \vec{r}' et t' sont des paramètres fixes. On note alors $c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t')$ la solution correspondante. Calculer $\hat{c}_\delta(\vec{k}, \omega|\vec{r}', t')$ en utilisant le résultat de la question précédente. Cette fonction est appelée fonction de Green de l'équation d'advection-diffusion.

Solution :

On calcule la transformée de Fourier de la distribution de Dirac :

$$\hat{s}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{r} \in \mathbb{R}^3} d\vec{r} \int_{t \in \mathbb{R}} dt s(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r}')},$$

d'où l'on tire que

$$\hat{c}_\delta(\vec{k}, \omega|\vec{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r}')}}{\rho + D\vec{k}^2 + i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)}.$$

IV.D. Exprimer la solution $c(\vec{r}, t)$ pour une source $s(\vec{r}, t)$ quelconque en fonction de $s(\vec{r}, t)$ et de $c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t')$ (qu'on ne demande pas d'expliciter). On rappelle que $s * \delta = s$ (où $*$ désigne le produit de convolution).

Solution :

On utilise l'indication donnée par l'énoncé, et on réécrit le terme de source de l'Éq. (17) sous la forme

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\vec{r}, t) - D\Delta c(\vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c(\vec{r}, t) + \rho c(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) = \int_{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3} d\vec{r}' \int_{t' \in \mathbb{R}} dt' s(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t').$$

Le membre de droite est alors une somme de termes sources de la forme $\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$ pondérés par des coefficients $s(\vec{r}', t')$, dont la solution est $c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t')$. Par linéarité de l'équation aux dérivées partielles, la solution générale de cette équation différentielle s'obtient par combinaison linéaire des différentes solutions pour les sources en Dirac, soit

$$c(\vec{r}, t) = \int_{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3} d\vec{r}' \int_{t' \in \mathbb{R}} dt' s(\vec{r}', t') c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t').$$

IV.E. Justifier que $c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t') = c_\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t'|\vec{0}, 0)$. Par la suite, on notera simplement $c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t') = c_\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$. En déduire que pour une source quelconque, on a simplement $c = s * c_\delta$.

Solution :

On utilise le résultat de la question C, qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{\omega \in \mathbb{R}} d\omega \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r}')}}{\rho + D\vec{k}^2 + i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} d\vec{k} \int_{\omega \in \mathbb{R}} d\omega \frac{e^{i[\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - \omega(t - t')]}{\rho + D\vec{k}^2 + i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)} \\ &= c_\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t'|\vec{0}, 0). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que

$$c(\vec{r}, t) = \int_{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3} d\vec{r}' \int_{t' \in \mathbb{R}} dt' s(\vec{r}', t') c_\delta(\vec{r}, t|\vec{r}', t') = \int_{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3} d\vec{r}' \int_{t' \in \mathbb{R}} dt' s(\vec{r}', t') c_\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t'),$$

soit $c = s * c_\delta$.