

HMEF104 — Electromagnétisme  
**Examen 02/03/2021**  
(2 heures)

Tous documents interdits. Calculatrice de type collège autorisée.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Le sujet est noté sur 40 points.

## 1 Électromagnétisme et relativité (14 points)

Ce sujet est inspiré d'une partie du sujet 2020 de la banque CCP de la filière MP.

### 1.1 Préliminaires (3 points)

On s'intéresse à un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation rectiligne et uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}_e$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . On supposera que règne dans le référentiel  $\mathcal{R}$  un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

- (1 point) Rappeler l'expression de la force électromagnétique  $\mathbf{F}$  subie par une charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , du fait du champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  dans ce même référentiel.

**Solution:** La force électromagnétique subie par une charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , et baignant dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , est donnée par la formule de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (1)$$

- (1 point) Rappeler la formule de composition galiléenne des vitesses reliant la vitesse  $\mathbf{v}$  d'un point matériel dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , la vitesse  $\mathbf{v}'$  de ce même point matériel dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et la vitesse d'entraînement  $\mathbf{v}_e$ .

**Solution:** La formule de composition galiléenne des vitesses s'écrit, avec les notations de l'énoncé,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}'. \quad (2)$$

- (1 point) En notant  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  le champ électromagnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , et en utilisant les invariances de la force électromagnétique  $\mathbf{F}$  et de la charge  $q$  par changement de référentiel, obtenir la formule de composition suivante donnant le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  en fonction de  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = & \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} = & \mathbf{B}' \end{cases}. \quad (1)$$

Commenter.

**Solution:** On écrit la force de Lorentz subie par la charge  $q$  dans les deux référentiels en utilisant le résultat de la première question. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}),$$

et dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}'),$$

en utilisant l'invariance de la charge par changement de référentiel. Si on exploite également l'invariance de la force par changement de référentiel alors on a  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ , ou encore

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}'.$$

On utilise maintenant la formule de composition des vitesses de la question précédente, et on obtient finalement que

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}'.$$

Cette égalité étant correcte pour toute vitesse  $\mathbf{v}$ , on peut évaluer les termes membre à membre qui en dépendent et n'en dépendent pas respectivement, soit :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}' \end{cases} \quad (3)$$

On constate que le champ magnétique est invariant par changement de référentiel, contrairement au champ électrique.

## 1.2 Champ électromagnétique créé par un fil infini (11 points)

On considère un fil de longueur infinie uniformément chargé, de densité linéique de charges  $\lambda'$ , et d'axe  $(Oz)$ . On note  $\mathcal{R}'$  le référentiel du fil. On suppose que ce fil est animé d'un mouvement de vitesse  $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_z$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . On se placera en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . On notera  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  (respectivement  $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ ) le champ électromagnétique créé par le fil et vu par un observateur dans  $\mathcal{R}$  (respectivement dans  $\mathcal{R}'$ ).

- (1 point) Justifier que  $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$ . En utilisant l'équation (1) de la section précédente, en déduire  $\mathbf{B}$ .

**Solution:** Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , le fil est immobile et uniformément chargé. Il n'y a aucune charge en mouvement et donc aucun courant. Ainsi, le fil ne crée dans son référentiel aucun champ magnétique et

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0}. \quad (4)$$

En utilisant la formule (1) de composition précédente du champ magnétique, on obtient que

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

- (1 point) Rappeler le théorème de Gauss.

**Solution:** Le théorème de Gauss indique que pour toute surface fermée  $\mathcal{S}$  orientée conventionnellement vers l'extérieur, le flux du champ électrique à travers cette surface est égal à la charge intérieure à la surface divisée par  $\epsilon_0$  (la permittivité du vide) :

$$\oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}(M, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

avec

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(M, t) dV \quad (7)$$

la charge intérieure, qui s'exprime comme une intégrale sur le volume  $\mathcal{V}$  délimité par la surface  $\mathcal{S}$  de la densité volumique de charges  $\rho(M, t)$ . Le théorème de Gauss est valable en électromagnétisme.

- (2 points) En exploitant les symétries et les invariances de la distribution de charges, calculer  $\mathbf{E}'$ . En déduire  $\mathbf{E}$  par le résultat (1) de la section précédente.

**Solution:** Le problème est invariant par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), ainsi que par translation selon ce même axe. Ainsi, en coordonnées cylindriques, le champ électrique  $\mathbf{E}'$  ne dépend que de la variable  $r$ .

Par ailleurs, pour un point  $M$  donné, le plan passant par  $M$  et contenant l'axe du fil est plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. De la même façon, le plan passant par  $M$  et étant orthogonal à l'axe du fil est lui aussi plan de symétrie de la distribution de charges, et donc du champ électrique. Le champ électrique  $\mathbf{E}'$  est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, soit

$$\mathbf{E}'(M) = E'(r)\mathbf{e}_r,$$

en coordonnées cylindriques.

On applique maintenant le théorème de Gauss sur un cylindre  $\mathcal{S}$  de rayon  $r$ , de hauteur  $h$  et d'axe ( $Oz$ ). Le flux du champ électrique à travers ce cylindre vaut

$$\oiint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{E}'(M) \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r h E'(r),$$

le flux sur les bases étant nul. La charge intérieure vaut, quant à elle,

$$Q_{\text{int}} = \lambda' h.$$

Ceci permet donc d'en déduire l'expression du champ électrique

$$\mathbf{E}'(M) = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r. \quad (8)$$

On en déduit alors  $\mathbf{E}$  par la formule de composition (1). Le champ magnétique  $\mathbf{B}'$  étant nul, on a

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}'(M) = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r. \quad (9)$$

4. (1 point) Justifier que dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le fil est parcouru par un courant d'intensité  $I$  qu'on exprimera en fonction de  $\lambda'$  et  $v_e$ .

**Solution:** Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , le fil se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}_e$  selon son axe. Cela correspond dans ce même référentiel à des charges mobiles selon  $\mathbf{e}_z$ . En un point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}$  de l'axe ( $Oz$ ), la quantité de charges traversant  $P$  pendant  $dt$  correspond à la charge  $dq$  dans le segment de fil de longueur  $d\ell = v_e dt$ , soit  $dq = \lambda' d\ell$ . L'intensité du courant vaut donc

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda' v_e. \quad (10)$$

5. (1 point) Rappeler le théorème d'Ampère. Justifier qu'on peut l'utiliser pour calculer  $\mathbf{B}$ .

**Solution:** Le théorème d'Ampère n'est valable qu'en magnétostatique, c'est-à-dire quand on étudie des courants permanents : c'est bien le cas ici. Dans ce cas, le théorème d'Ampère indique que pour tout contour fermé  $\mathcal{C}$ , la circulation du champ magnétique sur ce contour est égale à  $\mu_0$  (perméabilité du vide) multipliée par l'intensité enlacée par le contour, soit

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_e, \quad (11)$$

avec

$$I_e = \iint_{M \in \mathcal{S}} \mathbf{j}(M) \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

désignant l'intensité enlacée, qui s'exprime comme l'intégrale de la densité volumique de courants sur la surface  $\mathcal{S}$  sous-tendue par le contour  $\mathcal{C}$ .

6. (2 points) En exploitant les symétries et invariances de la distribution de courants, calculer  $\mathbf{B}$ . Commenter.

**Solution:** La distribution de courants est invariante par rotation selon  $(Oz)$  et par translation selon ce même axe. Ainsi, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique ne dépend que de la variable  $r$ .

De plus, pour un point  $M$  donné, le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution de courants, et donc d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan, soit finalement

$$\mathbf{B}(M) = B(r)\mathbf{e}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.

On applique maintenant le théorème d'Ampère en calculant la circulation du champ magnétique sur un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$  d'axe  $(Oz)$  :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \mathbf{B}(M) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r B(r).$$

Par ailleurs, l'intensité enlacée vaut

$$I_e = I = \lambda' v_e.$$

On obtient donc, d'après le théorème d'Ampère,

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 \lambda' v_e}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta. \quad (13)$$

Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 1 de cette section ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ).

En réalité, les lois de transformation du champ électromagnétique ne peuvent pas être obtenues dans le cadre de la relativité galiléenne. La théorie de la relativité restreinte montre que les lois de transformation du champ électromagnétique par changement de référentiel sont de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{//} = & \mathbf{E}'_{//} \\ \mathbf{E}_\perp = & \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}'_\perp) \\ \mathbf{B}_{//} = & \mathbf{B}'_{//} \\ \mathbf{B}'_\perp = & \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \wedge \mathbf{E}'_\perp\right) \end{cases}, \quad (2)$$

où  $c$  désigne la célérité de la lumière dans le vide,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_e/c)^2}},$$

et où  $//$  et  $\perp$  désignent respectivement les composantes parallèle et orthogonale à  $\mathbf{v}_e$  ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_\perp$ ).

7. (2 points) En utilisant la formule (2) de composition relativiste du champ électromagnétique, calculer le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Commenter.

**Solution:** On calcule tout d'abord les composantes du champ électromagnétique dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_{//}(M) = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}'_{\perp}(M) = \frac{\lambda'}{2\pi r} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{B}'_{//}(M) = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{\perp}(M) = \mathbf{0} \end{cases}$$

On utilise alors les formules de composition pour calculer le champ électromagnétique dans  $\mathcal{R}$ . Pour la composante tangentielle du champ électrique, on a :

$$\mathbf{E}_{//}(M) = \mathbf{E}'_{//}(M) = \mathbf{0}.$$

Pour la composante orthogonale du champ électrique, on a :

$$\mathbf{E}_{\perp}(M) = \gamma [\mathbf{E}'_{\perp}(M) - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}'_{\perp}(M)] = \gamma \mathbf{E}'_{\perp}(M) = \frac{\gamma \lambda'}{2\pi r} \mathbf{e}_r.$$

Pour la composante tangentielle du champ magnétique, on a :

$$\mathbf{B}_{//}(M) = \mathbf{B}'_{//}(M) = \mathbf{0}.$$

Enfin, pour la composante orthogonale du champ magnétique, on a :

$$\mathbf{B}_{\perp}(M) = \gamma \left[ \mathbf{B}'_{\perp}(M) + \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \wedge \mathbf{E}'_{\perp}(M) \right] = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{E}'_{\perp}(M) = \frac{\gamma \lambda' v_e}{2\pi c^2 \epsilon_0 r} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r = \frac{\gamma \mu_0 \lambda' v_e}{2\pi r} \mathbf{e}_{\theta},$$

en utilisant la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ . On obtient donc finalement l'expression du champ électromagnétique dans  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(M) = \frac{\gamma \lambda'}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{B}(M) = \frac{\gamma \mu_0 \lambda' v_e}{2\pi r} \mathbf{e}_{\theta} \end{cases} \quad (14)$$

On retrouve pour les champs électrique et magnétique les expressions obtenues précédemment aux questions 3 et 6 au facteur  $\gamma$  près.

8. (1 point) Donner la densité linéique de charges vue dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . En exploitant de nouveau l'invariance de la charge électrique par changement de référentiel, dire si cela correspond à une contraction ou à une dilatation des longueurs. Commenter.

**Solution:** Si on compare les résultats du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et du champ électrique  $\mathbf{E}$  obtenus à la question précédente à ceux des questions 6 et 3 respectivement, alors on constate un facteur  $\gamma$  supplémentaire en tenant compte de la composition relativiste des champs.

Quand on a effectué la composition galiléenne des champs, on a supposé que la densité linéique de charges est invariante par changement de référentiel. Or, on observe que ce n'est pas le cas en réalité, et la densité linéique vue dans  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\lambda = \gamma \lambda'. \quad (15)$$

On considère maintenant un segment de fil, de longueur  $d\ell'$  au repos (dans  $\mathcal{R}'$ ). La charge qu'il porte est  $dq = \lambda' d\ell'$ . Par invariance de la charge par changement de référentiel, ce segment porte la même charge dans  $\mathcal{R}$ . Dans  $\mathcal{R}$ , ce segment a pour longueur  $d\ell \neq d\ell'$ , qui est telle que

$$\lambda' d\ell' = \lambda d\ell,$$

ou encore

$$d\ell = \frac{d\ell'}{\gamma}. \quad (16)$$

Vu que  $\gamma > 1$ , cela correspond à une contraction des longueurs, qui est une des prédictions importantes de la relativité restreinte.

## 2 Chute d'un aimant dans un tube conducteur (26 points)

On considère un aimant cylindrique de masse  $m$  lâché sans vitesse initiale à une hauteur  $L \simeq 50$  cm du sol. On note  $z$  la verticale ascendante, et on prendra  $z = 0$  confondu avec le sol. Dans tout cet exercice, on prendra  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  l'accélération de la pesanteur. On étudiera le mouvement de l'aimant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire supposé galiléen.

### 2.1 Étude qualitative (4 points)

- (1 point) On lâche l'aimant dans l'air. Calculer le temps  $T$  pour que l'aimant touche le sol en négligeant tout frottement. Faire l'application numérique.

**Solution:** On applique le principe fondamental de la dynamique à l'aimant dans  $\mathcal{R}$ , uniquement soumis à son propre poids (frottements négligés) :

$$m\mathbf{a} = -mg\mathbf{e}_z,$$

où  $\mathbf{a}$  désigne l'accélération de l'aimant dans  $\mathcal{R}$ . En projetant selon  $\mathbf{e}_z$ , on obtient

$$\ddot{z} = -g.$$

En intégrant deux fois, et en utilisant le fait qu'à  $t = 0$ , l'aimant est lâché sans vitesse initiale à une hauteur  $L$  au-dessus du sol, on a

$$z(t) = L - \frac{1}{2}gt^2.$$

Lorsque l'aimant touche le sol, on a  $z = 0$ , ce qui donne la durée de chute

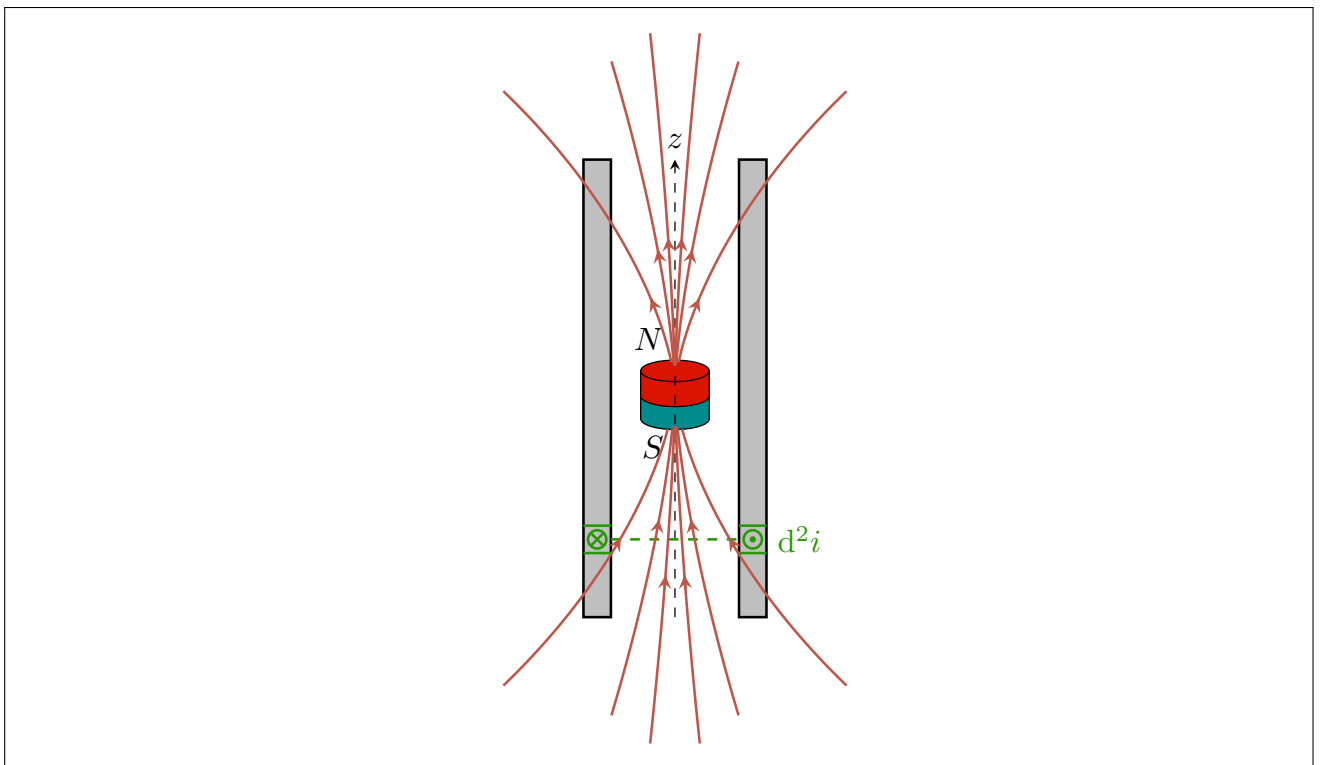
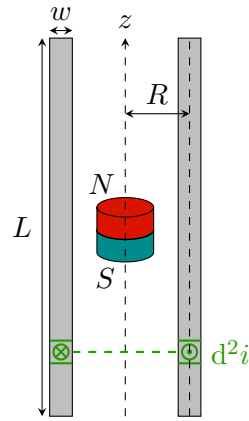
$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}}. \quad (1)$$

L'application numérique donne  $T \simeq 0,32$  s.

On fait dorénavant tomber l'aimant dans un tube creux de cuivre de rayon moyen  $R$ , d'épaisseur  $w$ , de longueur  $L$  et de conductivité électrique  $\sigma$  (voir schéma ci-contre). Le pôle Nord de l'aimant est dirigé vers le haut. Le temps de chute est alors  $T \simeq 10$  s. On se propose d'expliquer qualitativement l'origine de cet écart entre les durées de chute dans l'air et dans le tube. On rappelle que le cuivre est un conducteur électrique mais présente des propriétés magnétiques négligeables (il est paramagnétique).

- (1 point) Reprendre le schéma de l'énoncé en représentant les lignes de champ magnétique créées par l'aimant.

**Solution:** Les lignes de champ sont dirigées du pôle Nord de l'aimant vers le pôle Sud, comme indiqué sur le schéma ci-contre.



3. (1 point) On considère une couronne de tube conducteur entre les hauteurs  $z$  et  $z+dz$  et d'épaisseur  $dr$ , orientée selon  $+e_z$ , comme sur le schéma (en vert). Justifier que cette couronne de tube est parcourue par un courant  $di$  lors de la chute de l'aimant. Comment s'appellent ces courants ?

**Solution:** Cette couronne se comporte comme un circuit fermé. Lorsque l'aimant chute, cette spire voit un champ magnétique variable. Plus précisément, le flux du champ magnétique à travers la spire est variable. En vertu de la loi de Faraday, cela génère donc dans ce circuit élémentaire une force électromotrice d'induction, et donc des courants induits. Ces courants s'appellent les courants de Foucault.

4. (1 point) Préciser le signe du courant induit quand l'aimant est au-dessus ou en dessous de la couronne et en déduire que la présence du tube freine l'aimant dans sa chute.

**Solution:** Lorsque l'aimant chute et se trouve au-dessus de la couronne, le flux du champ magnétique à travers la spire est positif et augmente. En vertu de la loi de modération de Lenz, les effets inductifs s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance. Le courant induit dans la couronne

créé donc un champ magnétique qui s'oppose à la variation de flux du champ magnétique créé par l'aimant. La couronne doit donc créer un flux négatif, et donc un champ dirigé selon  $-\mathbf{e}_z$ . Ainsi

$$di < 0. \quad (2)$$

À l'inverse, quand l'aimant est sous la couronne, le flux du champ magnétique est toujours positif mais décroît. Pour compenser la variation de flux, les courants induits doivent créer un champ magnétique selon  $+\mathbf{e}_z$ , et donc

$$di > 0 \quad (3)$$

dans ce cas.

Toujours d'après la loi de modération de Lenz, les courants induits doivent s'opposer à la cause qui leur ont donné naissance, c'est-à-dire le champ magnétique variable dû à la chute de l'aimant. Les courants induits doivent donc freiner l'aimant.

## 2.2 Description quantitative du phénomène (12,5 points)

On introduit  $\mathcal{R}'$  le référentiel de l'aimant. On note  $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_z$  la vitesse de l'aimant dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On se place en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  confondu avec l'axe du tube.

1. (0,5 points) Que vaut  $\mathbf{E}'$ , le champ électrique dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

**Solution:** Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'aimant est au repos et non chargé localement. Ainsi, le champ électrique qu'il crée est nul, ou encore

$$\mathbf{E}'(M) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

2. (1 point) Montrer que, dans l'hypothèse où le mouvement de l'aimant (de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) est non relativiste, les formules (2) de composition du champ électromagnétique de l'exercice précédent se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}' \end{cases}$$

On donne, à toutes fins utiles,

$$(1+x)^\gamma = 1 + \gamma x + O(x^2).$$

**Solution:** On suppose que le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est non relativiste, ce qui revient à supposer que  $v/c \ll 1$  (attention ici que  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ ). On va donc réaliser un développement limité des expressions précédentes au plus petit ordre non nul en  $v/c$ . On développe le facteur  $\gamma$  :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right),$$

ce qui montre que le premier terme non nul dans le développement de  $\gamma$  est d'ordre 2 en  $v/c$ . Ainsi, au premier ordre, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}'_\perp \\ &= \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'_{//}), \\ &= \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant du fait que  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{B}'_{//}$  étant colinéaires, leur produit vectoriel est nul. On a donc finalement, pour le champ électrique total,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}'_{//} + \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}', \quad (5)$$



en utilisant l'équation précédente et la formule de composition pour  $\mathbf{E}'_{//}$ .

De la même manière, on écrit la relation de composition de  $\mathbf{B}$ , en utilisant le fait que  $\gamma = 1$  au premier ordre en  $v/c$  et les relations de composition de  $\mathbf{B}'_{//}$  et  $\mathbf{B}'_{\perp}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}'_{//} + \mathbf{B}'_{\perp} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}'_{//} + \mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}'_{\perp}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge (\mathbf{E}' - \mathbf{E}'_{//}) \end{aligned}$$

soit finalement

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}', \quad (6)$$

en utilisant le fait que  $\mathbf{E}'_{//}$  et  $\mathbf{v}$  étant colinéaires, leur produit vectoriel est nul.

3. (0,5 points) Dédurre de la question précédente que le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  s'exprime en fonction du champ magnétique  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\text{aim}}$  créé par l'aimant dans son référentiel propre sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{\text{aim}} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aim}} \end{cases}$$

On négligera le champ magnétique créé par les courants induits dans le tube conducteur.

**Solution:** On utilise les résultats des deux questions précédentes et on obtient :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' = \mathbf{0} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{\text{aim}} \quad (7)$$

et

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}' = \mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\text{aim}}. \quad (8)$$

Nous avons ici considéré que le champ magnétique dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se confondait avec le champ magnétique créé par l'aimant, ce qui revient à négliger le champ magnétique créé par les courants de Foucault.

4. (1 point) Étudier les symétries et invariances du champ magnétique créé par l'aimant. En déduire qu'il est de la forme :

$$\mathbf{B}_{\text{aim}}(M) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z.$$

On donne, à toutes fins utiles, le rotationnel d'un champ de vecteurs  $\mathbf{a}$  en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_{\theta}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r a_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z.$$

**Solution:** Le problème est tout d'abord invariant par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ . Le champ magnétique ne dépend donc pas de  $\theta$  en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{B}_{\text{aim}}(M) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_{\theta}(r, z)\mathbf{e}_{\theta} + B_z(r, z)\mathbf{e}_z.$$

Si on peut négliger le champ magnétique créé par les courants induits devant celui créé par l'aimant, alors l'équation de Maxwell-Ampère dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  indique qu'en dehors de l'aimant, on a

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_{\text{aim}} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

car  $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$ .

On en déduit donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

La première équation permet d'en déduire que  $B_\theta(r, z) = B_\theta(r)$  (ne dépend pas de  $z$ ). Par ailleurs la dernière équation montre que  $B_\theta(r, z) = A/r$  où  $A$  est une constante. Le champ magnétique ne pouvant diverger quand  $r = 0$ , on a donc que  $A = 0$ , ou encore que  $B_\theta = 0$ . Ainsi, le champ magnétique se met sous la forme :

$$\mathbf{B}_{\text{aim}}(M) = B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z. \quad (10)$$

5. (1 point) Rappeler la loi d'Ohm locale. En déduire la densité volumique de courants  $\mathbf{j}$  dans le tube de cuivre dans le référentiel du laboratoire, qu'on exprimera dans la base cylindrique.

**Solution:** La loi d'Ohm locale s'écrit

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (11)$$

avec  $\sigma$  la conductivité électrique du matériau. Dans le tube de cuivre, la densité volumique de courants s'écrit donc

$$\mathbf{j} = -\sigma \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{\text{aim}} = \sigma v B_r \mathbf{e}_\theta. \quad (12)$$

6. (0,5 points) On considère une couronne de tube de hauteur  $dz$  et d'épaisseur  $dr$  autour du rayon  $r$  et de la hauteur  $z$ , orientée selon  $+\mathbf{e}_z$  (selon la règle de la main droite). Donner l'expression de l'intensité  $di$  qui parcourt la couronne.

**Solution:** On utilise le résultat précédent donnant  $\mathbf{j}$ . On obtient alors

$$di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

où  $d\mathbf{S} = dr dz \mathbf{e}_\theta$ . On obtient donc finalement

$$di = \sigma v B_r dr dz. \quad (13)$$

7. (1 point) Déduire de la question précédente la force de Laplace  $d^2\mathbf{F}_L$  que cette portion de tube subit.

**Solution:** On calcule la force de Laplace sur cette couronne  $\mathcal{C}$ , assimilable à une spire fermée :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_L &= di \int_{M \in \mathcal{C}} d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{B} \\ &= di \int_0^{2\pi} r d\theta \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{B}' \\ &= -2\pi r B_r di \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

la composante selon  $\mathbf{e}_r$  s'annulant lorsqu'on intègre sur  $\theta$ . En utilisant l'expression de  $di$  de la question précédente, on obtient

$$d\mathbf{F}_L = -2\pi r \sigma v B_r^2 dr dz \mathbf{e}_z. \quad (14)$$

8. (1 point) En négligeant les effets de bords, montrer que la force de Laplace exercée par l'aimant sur le tube se met sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{aim} \rightarrow \text{tube}} = -2\pi\sigma v \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R-w/2}^{R+w/2} dr r B_r^2(r, z) \mathbf{e}_z.$$

**Solution:** Pour obtenir la force de Laplace s'exerçant sur tout le tube du fait de l'aimant, il suffit de sommer les forces s'exerçant sur toutes les couronnes élémentaires :

$$\mathbf{F}_{\text{aim} \rightarrow \text{tube}} = \iint_{\text{tube}} d\mathbf{F}_L.$$

Si on néglige les effets de bords, alors on peut intégrer  $z$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  et cela donne

$$\mathbf{F}_{\text{aim} \rightarrow \text{tube}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R-w/2}^{R+w/2} d\mathbf{F}_L,$$

soit le résultat attendu en utilisant l'expression de  $d\mathbf{F}_L$  obtenue à la question précédente.

9. (1 point) En déduire la force exercée par le tube sur l'aimant. Montrer qu'elle se met sous la forme  $\mathbf{F}_{\text{tube} \rightarrow \text{aimant}} = -\alpha \mathbf{v}$  où on explicitera l'expression de  $\alpha$ . Commenter.

**Solution:** On utilise la troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques. On en déduit alors que la force exercée par le tube sur l'aimant est l'opposée de la force obtenue à la question précédente :

$$\mathbf{F}_{\text{tube} \rightarrow \text{aim}} = 2\pi\sigma v \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R-w/2}^{R+w/2} dr r B_r^2(r, z) \mathbf{e}_z = -\alpha \mathbf{v}, \quad (15)$$

avec

$$\alpha = 2\pi\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R-w/2}^{R+w/2} dr r B_r^2(r, z). \quad (16)$$

Cette force est analogue à une force de frottements fluide, et explique que le temps de chute de l'aimant dans le tube augmente, car les courants de Foucault induits génèrent une force de freinage d'origine inductive.

10. (0,5 points) Simplifier l'expression de  $\alpha$  dans l'hypothèse où le tube est de faible épaisseur ( $w \ll R$ ) sous la forme :

$$\alpha = 2\pi R\sigma w \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_r^2(R, z). \quad (3)$$

**Solution:** Si on note  $F(r)$  une primitive de la fonction  $f(r) = r B_r^2(r, z)$  à  $z$  fixé, alors on peut réécrire  $\alpha$  sous la forme

$$\alpha = 2\pi\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz [F(R+w/2) - F(R-w/2)].$$

On effectue alors un développement limité dans l'hypothèse où  $w \ll R$  :

$$F(R \pm w/2) = F(R) \pm \frac{w}{2} F'(R) = F(R) \pm \frac{w}{2} f(R).$$

On obtient donc finalement

$$\alpha = 2\pi\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz w f(R) = 2\pi R\sigma w \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_r^2(R, z). \quad (17)$$

11. (1 point) En utilisant les lois de la mécanique, obtenir l'équation différentielle vérifiée par  $v$ . On négligera les frottements de l'air et d'éventuels frottements solides contre la paroi du tube.

**Solution:** On applique le principe fondamental de la dynamique à l'aimant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, et soumis à son poids et la force de freinage inductive :

$$m \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = m\mathbf{g} - \alpha\mathbf{v},$$

soit en projetant selon  $\mathbf{e}_z$  :

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v = mg. \quad (18)$$

12. (2 points) Résoudre l'équation précédente. Tracer l'évolution de la vitesse en fonction du temps. En déduire que l'aimant atteint une vitesse limite  $v_{\text{lim}}$  après un temps caractéristique  $\tau$ , qu'on exprimera tous deux en fonction de  $m$ ,  $\alpha$  et  $g$ .

**Solution:** On recherche la solution de l'équation précédente sous la forme  $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$  où  $v_h$  est solution de l'équation homogène associée et  $v_p$  une solution particulière de l'équation non homogène. L'équation homogène associée se met sous la forme

$$\frac{dv_h}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_h,$$

dont la solution générale est  $v_h(t) = Ce^{-\alpha t/m}$  avec  $C$  une constante. Une solution particulière de l'équation avec second membre peut être prise constante égale à  $v_p = mg/\alpha$ , soit finalement pour la solution complète :

$$v(t) = Ce^{-\alpha t/m} + \frac{mg}{\alpha}.$$

Pour obtenir la constante  $C$ , on utilise la condition initiale  $v(0) = 0$  :

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/m}), \quad (19)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$v(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{t/\tau}),$$

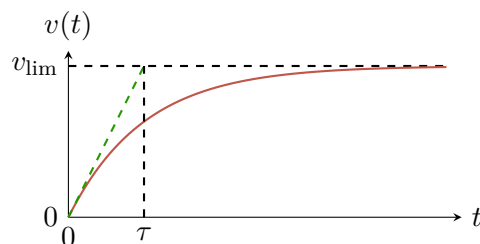
où

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\alpha} \quad (20)$$

est la vitesse limite de la chute et

$$\tau = \frac{m}{\alpha} \quad (21)$$

la durée typique du régime transitoire. L'évolution de la vitesse avec le temps est représentée ci-contre.



13. (1,5 points) Montrer que l'énergie mécanique de l'aimant au cours de sa chute vérifie :

$$\frac{dE_m}{dt} = -P_J,$$

où  $P_J$  désigne la puissance dissipée par effet Joule dans le tube conducteur. On rappelle que la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière vaut  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Commenter.

**Solution:** On applique le théorème de la puissance mécanique à l'aimant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\mathbf{F}_{\text{tube} \rightarrow \text{aim}}),$$

où  $P(\mathbf{F}_{\text{tube} \rightarrow \text{aim}}) = \mathbf{F}_{\text{tube} \rightarrow \text{aim}} \cdot \mathbf{v}$  désigne la puissance de la force exercée par le tube sur l'aimant, soit

$$\frac{dE_m}{dt} = -\alpha v^2.$$

On calcule maintenant la puissance dissipée par effet Joule dans le tube. Pour cela, on calcule d'abord la puissance volumique

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = \sigma v^2 B_r^2(r, z).$$

Puis, on intègre sur tout le volume du tube conducteur :

$$P_J = \iiint_{\text{tube}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{R/2-w}^{R/2+w} dr 2\pi r \sigma v^2 B_r^2(r, z) = \alpha v^2,$$

où on a reconnu l'expression de  $\alpha$ . Ceci nous permet d'en déduire que

$$\frac{dE_m}{dt} = -P_J. \quad (22)$$

Cela signifie que lorsque l'aimant chute, son énergie mécanique diminue car il induit des courants induits dans le tube qui dissipent de l'énergie par effet Joule. Finalement, l'énergie mécanique de l'aimant dans sa chute est transformée en transfert thermique.

### 2.3 Étude expérimentale (9,5 points)

- (2 points) Une expérience, faite en laboratoire d'enseignement, permet d'obtenir l'évolution de la vitesse limite  $v_{\text{lim}}$  en fonction de la masse  $m$  de l'aimant. Les mesures sont représentées Fig. 1. Un ajustement affine des données a été réalisé et les paramètres d'ajustement sont donnés dans la légende. Commenter. À partir des données présentes sur la figure, en déduire  $\alpha$  et son incertitude.

**Solution:** L'analyse de la section précédente indique que la vitesse limite de l'aimant varie linéairement avec sa masse, avec une pente  $a = g/\alpha$ . C'est donc pour cela qu'un ajustement affine a été réalisé. Il a été trouvé une ordonnée à l'origine compatible avec 0, ce qui valide le modèle théorique présenté précédemment. Par ailleurs, à partir de la pente mesurée expérimentalement, on peut remonter à  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{g}{a} = 0,943 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1},$$

ainsi qu'à son incertitude :

$$\frac{u(\alpha)}{\alpha} = \frac{u(a)}{a} \iff u(\alpha) = \frac{gu(a)}{a^2} = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On obtient donc la mesure suivante de  $\alpha$  :

$$\alpha = (0,94 \pm 0,03) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (23)$$

- (1 point) Donner un majorant de la durée  $\tau$  du régime transitoire dans l'expérience. En déduire que l'hypothèse d'une vitesse limite atteinte est vérifiée.

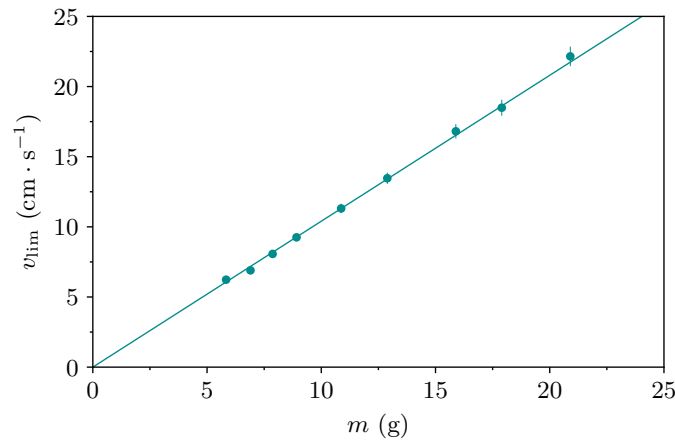


FIGURE 1 – Évolution de la vitesse limite de chute  $v_{\text{lim}}$  en  $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$  en fonction de la masse de l'aimant  $m$  en  $g$ . L'expérience est réalisée avec le même aimant lesté par différentes masses marquées. Les mesures sont représentées par des points, tandis qu'un ajustement affine de la forme  $v_{\text{lim}} = am + b$  a été réalisé et est représenté par la ligne continue, avec  $a = (10,4 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $b = (0 \pm 2) \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Figure issue de l'ouvrage *Physique Expérimentale*, Collectif Jolidon, EDP Sciences, 2021.

**Solution:** On calcule un majorant de la durée  $\tau$  du régime transitoire :

$$\tau = \frac{m}{\alpha} \lesssim 2 \times 10^{-2} \text{ s}, \quad (24)$$

car les masses n'excèdent pas 20 g. On compare à la durée totale de la chute qui est de  $T \simeq 10 \text{ s}$ . La durée du régime transitoire est donc négligeable devant le temps total de chute, et l'hypothèse d'une vitesse limite atteinte est bien vérifiée.

3. (1,5 points) On rappelle que le champ magnétique créé en un point  $M$  par un dipôle de moment dipolaire  $\mathcal{M}$  placé en un point  $O$ , s'écrit, avec  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ ,

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathcal{M}}{\|\mathbf{r}\|^5}.$$

En supposant qu'on peut assimiler l'aimant à un dipôle de moment magnétique  $\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathbf{e}_z$ , donner les composantes de  $\mathbf{B}_{\text{dip}}$  dans la base cylindrique d'origine le centre de l'aimant.

**Solution:** On utilise le résultat donné par l'énoncé, avec  $\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$  :

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}z(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) - (r^2 + z^2)\mathcal{M}\mathbf{e}_z}{(r^2 + z^2)^{5/2}},$$

ou encore :

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r, z) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi(r^2 + z^2)^{5/2}} [3rz\mathbf{e}_r + (2z^2 - r^2)\mathbf{e}_z].$$

On en déduit donc les composantes de  $\mathbf{B}_{\text{dip}}$  dans la base cylindrique :

$$\begin{cases} B_{\text{dip},r}(r, z) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi} \frac{3rz}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \\ B_{\text{dip},\theta}(r, z) = 0 \\ B_{\text{dip},z}(r, z) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \end{cases}. \quad (25)$$

4. (1 point) À partir du résultat de la question précédente montrer que la valeur  $\alpha_{\text{dip}}$  du coefficient  $\alpha$  dans l'hypothèse où l'aimant est assimilable à un dipôle est

$$\alpha_{\text{dip}} = \frac{45\mu_0^2 w \sigma \mathcal{M}^2}{1024R^4}.$$

On se placera dans le cas où  $w \ll R$  et on utilisera le résultat (3) de la question 10 de la partie précédente. On donne à toutes fins utiles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{y^2}{(1+y^2)^5} = \frac{5\pi}{128}.$$

**Solution:** On calcule la valeur de  $\alpha_{\text{dip}}$  par son expression intégrale :

$$\alpha_{\text{dip}} = 2\pi R w \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_{\text{dip},r}^2(R, z) = 2\pi R w \sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M} R}{4\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{z^2}{(R^2 + z^2)^5}.$$

On fait alors le changement de variable  $y = z/R$  dans l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{dip}} &= 2\pi R w \sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M} R}{4\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} R dy \frac{R^2 y^2}{(R^2 + R^2 y^2)^5} \\ &= 2\pi R w \sigma \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M} R}{4\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{y^2}{R^7 (1+y^2)^5} \\ &= \frac{9w\sigma\mu_0^2\mathcal{M}^2}{4\pi R^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{y^2}{(1+y^2)^5} \end{aligned}$$

On utilise alors le résultat de l'intégrale fourni dans l'énoncé et on obtient finalement

$$\alpha_{\text{dip}} = \frac{9\mu_0^2 w \sigma \mathcal{M}^2}{4\pi R^4} \times \frac{5\pi}{128} = \frac{45\mu_0^2 w \sigma \mathcal{M}^2}{1024R^4}. \quad (26)$$

5. (2 points) Des mesures préliminaires donnent  $\mathcal{M} = (0,754 \pm 0,012) \text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Par ailleurs, les propriétés du tube sont :  $R = (6,45 \pm 0,10) \text{ mm}$ ,  $w = (1,0 \pm 0,1) \text{ mm}$  et  $\sigma = (5,16 \pm 0,05) \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ . Calculer  $\alpha_{\text{dip}}$  et son incertitude. Commenter par rapport à l'estimation numérique de  $\alpha$  obtenue à la question 1. On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ .

**Solution:** Le calcul de  $\alpha_{\text{dip}}$  donne

$$\alpha_{\text{dip}} = \frac{45\mu_0^2 w \sigma \mathcal{M}^2}{1024R^4} = 1,176 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Par ailleurs, on calcule son incertitude par propagation des incertitudes sur les paramètres intervenant dans son expression :

$$\frac{u(\alpha_{\text{dip}})}{\alpha_{\text{dip}}} = \sqrt{\left(\frac{u(w)}{w}\right)^2 + \left(\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{2u(\mathcal{M})}{\mathcal{M}}\right)^2 + \left(\frac{4u(R)}{R}\right)^2},$$

soit :

$$u(\alpha_{\text{dip}}) = 0,14 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}.$$

On a donc finalement

$$\alpha_{\text{dip}} = (1,18 \pm 0,14) \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (27)$$

La valeur de  $\alpha_{\text{dip}}$  n'est pas compatible avec celle de  $\alpha$  mesurée précédemment. Cela vient du fait qu'il n'est pas légitime d'assimiler l'aimant à un moment dipolaire car le tube est trop proche de l'aimant. Il faut se rappeler que le développement dipolaire décrit bien les distributions de courants uniquement à grande distance.

6. (1 point) L'aimant considéré ici est un cylindre de hauteur  $h = (1,00 \pm 0,02)$  cm et de rayon  $\rho = (0,50 \pm 0,01)$  cm. Une modélisation plus réaliste du champ magnétique créé par l'aimant, au-delà de l'approximation dipolaire, repose sur le fait que le champ qu'il crée est identique à celui créé par un cylindre de mêmes dimensions parcouru par un courant surfacique  $\mathbf{j}_s = \mathcal{M}/(\pi\rho^2h)\mathbf{e}_\theta$ . On obtient alors

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 \|\mathbf{j}_s\|}{\pi} [\beta_+ \mathcal{P}(k_+) + \beta_- \mathcal{P}(k_-)],$$

avec

$$\beta_{\pm} = \frac{\rho}{\sqrt{(z \pm h/2)^2 + (r + \rho)^2}}, \quad k_{\pm} = \sqrt{\frac{(z \pm h/2)^2 + (r - \rho)^2}{(z \pm h/2)^2 + (r + \rho)^2}},$$

et

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{K}(1 - k^2) - \frac{2[\mathcal{K}(1 - k^2) - \mathcal{E}(1 - k^2)]}{1 - k^2},$$

où  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  sont les intégrales elliptiques de première et seconde espèces. Le code Python suivant permet de calculer la valeur de  $\alpha$  avec cette nouvelle modélisation du champ créé par l'aimant.

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 import numpy as np # librairie pour les tableaux
4 from scipy.integrate import simps # intégration numérique
5 from scipy.special import ellipk, ellipe # fonctions spéciales
6
7 mu0 = 4*np.pi*1e-7 # Perméabilité du vide en H/m
8 R = 6.45e-3 # Rayon moyen du tube en m
9 w = 1e-3 # Épaisseur du tube en m
10 sigma = 5.16e7 # Conductivité électrique du tube en S/m
11 rho = 0.5e-2 # Rayon de l'aimant cylindrique en m
12 h = 1.0e-2 # Hauteur de l'aimant cylindrique en m
13 M = 0.754 # Moment magnétique de l'aimant en A.m2
14 L = 0.5 # Longueur du tube en m
15
16 def P(k):
17     return ellipk(1-k*k) - 2*(ellipk(1-k*k) - ellipe(1-k*k))/(1-k*k)
18
19 z = np.linspace(-0.5*L, 0.5*L, 500)
20
21 betap = rho/np.sqrt((z+0.5*h)**2 + (R+rho)**2)
22 betam = rho/np.sqrt((z-0.5*h)**2 + (R+rho)**2)
23 kp = np.sqrt(((z+0.5*h)**2 + (R-rho)**2) / ((z+0.5*h)**2 + (R+rho)**2))
24 km = np.sqrt(((z-0.5*h)**2 + (R-rho)**2) / ((z-0.5*h)**2 + (R+rho)**2))
25 Br = mu0*M*(betap*P(kp) - betam*P(km)) / (np.pi**2*rho**2*h)
26 Iz = simps(Br**2, z)
27
28 print(2*np.pi*R*sigma*w*Iz)

```

Commenter la ligne 17, les lignes 21 à 26, et la ligne 28.

**Solution:** La ligne 17 du code définit la fonction  $\mathcal{P}$  en fonction des intégrales elliptiques de première espèce `ellipk` et de seconde espèce `ellipe`. Les lignes 21 et 22 calculent  $\beta_{\pm}$  tandis que les lignes 23 et 24 calculent  $k_{\pm}$ . La ligne 25 calcule la composante radiale du champ magnétique pour chaque valeur de  $z$ , et la ligne 26 effectue l'intégration de  $z \rightarrow B_r(R, z)^2$  selon la méthode de Simpson. Enfin, la ligne 28 calcule  $\alpha$  selon le résultat (3) de la question 10 de la section précédente.

7. (1 point) Le code Python permet finalement d'obtenir  $\alpha_{th} = (0,87 \pm 0,13)$  kg·s<sup>-1</sup>. Commenter.

**Solution:** Avec cette nouvelle modélisation de l'aimant, on obtient une valeur en accord avec la mesure expérimentale aux incertitudes près. L'expérience, au-delà de vérifier la relation entre la



vitesse limite et la masse de l'aimant, a permis de mettre en évidence l'importance de la modélisation de l'aimant dans le traitement de l'expérience.